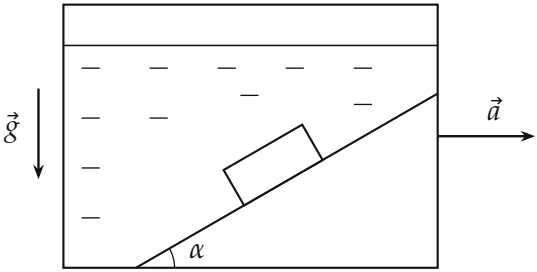
Брусок в разгоняющемся аквариуме

Задача 1. [Курчатов 2024/25, 9 класс, задача 1] В аквариуме с водой закреплена гладкая наклонная плоскость, наклонённая к горизонту под углом $\alpha = 30°$. На ней находится полностью погружённый брусок массой m и плотностью $\rho' = 1200$ кг/м^3. Аквариум разгоняется горизонтально с ускорением a. Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}3$. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Найдите минимальное ускорение a, при котором брусок не скользит вниз.



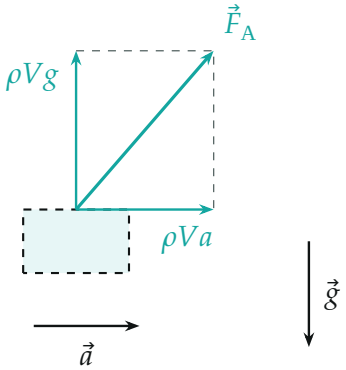
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на динамику тела в ускоренно движущейся жидкости. Брусок покоится относительно аквариума, значит движется вместе с ним с тем же ускорением $\vec{a}$. Главная особенность: в разгоняющейся воде сила Архимеда направлена не строго вверх — у неё есть горизонтальная составляющая $\rho V a$, ведь именно она разгоняет воду, если на месте бруска была бы вода. План: найти силу Архимеда, записать второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси вдоль и поперёк плоскости, затем условие для силы трения покоя $F_{\text{тр}} \le \mu N$. Второй способ — «эффективная сила тяжести» в системе аквариума.

Обозначения. $V = m/\rho'$ — объём бруска; $\vec{F}_{\text{A}}$ — сила Архимеда; $\vec{N}$ — сила нормальной реакции плоскости; $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения покоя, считаем её направленной вверх вдоль плоскости (она не даёт бруску съехать). Проекцию ускорения a берём на горизонтальную ось, направленную вправо, как на рисунке условия (плоскость поднимается вправо); знак a получится из ответа. Оси для бруска: x вверх вдоль плоскости, y перпендикулярно ей от плоскости. $g = 9{,}8$ м/с^2.

1. Сила Архимеда в ускоренной воде. Мысленно заменим брусок водой той же формы. Этот объём воды движется вместе со всей водой с ускорением $\vec{a}$, на него действуют сила тяжести $\rho V\vec{g}$ и сила давления окружающей воды — это и есть сила Архимеда. Второй закон Ньютона для выделенного объёма воды:

$$\rho V\vec{a} = \rho V\vec{g} + \vec{F}_{\text{A}} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{A}} = \rho V(\vec{a} - \vec{g}).$$

Давление окружающей воды от того, что внутри — вода или брусок, — не зависит, поэтому на брусок действует та же сила: вертикальная составляющая ρVg вверх и горизонтальная ρVa в сторону ускорения.

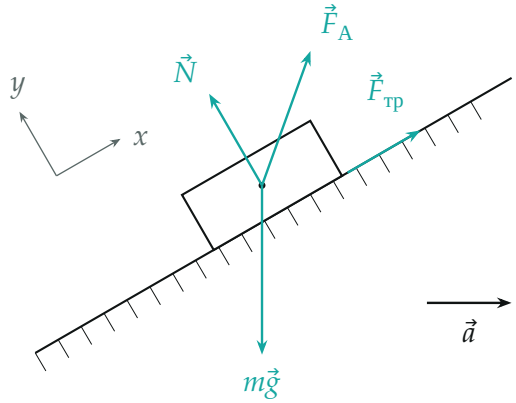


Сила Архимеда в разгоняющейся воде: вертикальная составляющая ρVg держит выделенный объём воды против силы тяжести, горизонтальная ρVa его разгоняет.

2. Второй закон Ньютона для бруска. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила Архимеда, сила нормальной реакции и сила трения покоя; ускорение бруска $\vec{a}$:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{A}} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Ось x (вверх по плоскости) составляет угол α с горизонталью, поэтому горизонтальный вектор длины A проецируется на неё как $A\cos\alpha$, вертикальный — как $A\sin\alpha$; на ось y — как $-A\sin\alpha$ и $A\cos\alpha$ соответственно.



Силы на брусок в системе отсчёта стола. Сила Архимеда $\vec{F}_A = \rho V(\vec{a} - \vec{g})$ отклонена от вертикали в сторону ускорения (её составляющие — на рисунке 2); трение покоя — вверх вдоль плоскости, так как брусок стремится съехать вниз.

Проекция на ось y (поперёк плоскости):

$$N - mg\cos\alpha + \rho Vg\cos\alpha - \rho Va\sin\alpha = -ma\sin\alpha,$$

$$N = (\rho' - \rho)V\,(g\cos\alpha - a\sin\alpha).$$

Проекция на ось x (вдоль плоскости):

$$F_{тр} - mg\sin\alpha + \rho Vg\sin\alpha + \rho Va\cos\alpha = ma\cos\alpha,$$

$$F_{тр} = (\rho' - \rho)V\,(g\sin\alpha + a\cos\alpha).$$

Обе силы пропорциональны $\rho' - \rho$: вода и «утяжеляет», и разгоняет брусок одинаково, работает только избыток его плотности над плотностью воды.

3. Условие «не скользит». Сила трения покоя не превосходит μN:

$$g\sin\alpha + a\cos\alpha \le \mu\,(g\cos\alpha - a\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad a \le -g\,\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Числа: $\sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0{,}5 - 0{,}260 = 0{,}240$, $\cos\alpha + \mu\sin\alpha = 0{,}866 +$

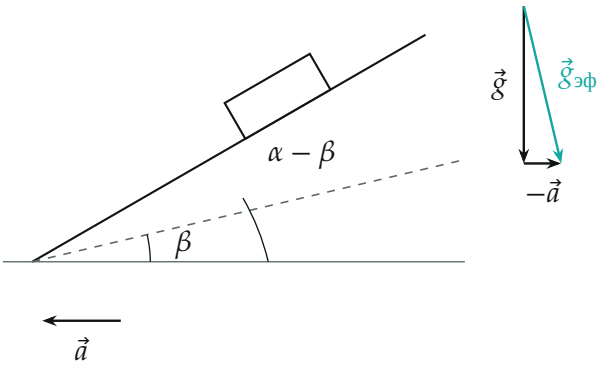
$0{,}150 = 1{,}016$,

$$a \le -9{,}8 \cdot \frac{0{,}240}{1{,}016} \approx -2{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус: аквариум нужно разгонять *влево* — в ту сторону, куда плоскость опускается, — с ускорением не меньше 2,3 м/с^2. Без ускорения брусок соскальзывает: $\operatorname{tg} 30^\circ = 0{,}58 > \mu$. При этом $N > 0$ ($g\cos\alpha - a\sin\alpha = 9{,}6$ м/с^2 при $a = -2{,}3$ м/с^2), брусок прижат к плоскости.

Второй способ: эффективная сила тяжести. В системе аквариума добавляется сила инерции $-m\vec{a}$, и всё выглядит как покой в поле «эффективной силы тяжести» $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$. Сила Архимеда $-\rho V\vec{g}_{\text{эф}}$ ей противоположна, их сумма $(\rho' - \rho)V\vec{g}_{\text{эф}}$. При ускорении аквариума влево $\vec{g}_{\text{эф}}$ отклоняется от вертикали вправо на угол β, $\operatorname{tg}\beta = a/g$, и эффективный наклон плоскости уменьшается до $\alpha - \beta$. Брусок на плоскости не скользит, пока $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \le \mu$:

$$\beta \ge \alpha - \operatorname{arctg}\mu = 30^\circ - 16{,}7^\circ = 13{,}3^\circ, \qquad a \ge g\operatorname{tg} 13{,}3^\circ \approx 2{,}3 \text{ м/с}^2.$$



Второй способ. Аквариум разгоняется влево, эффективная сила тяжести $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$ отклонена вправо на угол β; штриховая — «эффективный горизонт», перпендикулярный $\vec{g}_{\text{эф}}$. Относительно него плоскость наклонена на $\alpha - \beta$.

Обратите внимание. Ускорение, разогнанное вправо (как стрелка на рисунке условия), брусок только сталкивает: эффективная сила тяжести

наклоняется в сторону спуска. Нужное ускорение направлено в противоположную сторону. Плотности бруска и воды в ответ не входят: все силы, кроме реакции плоскости, пропорциональны $(\rho' - \rho)V$, но условие $\rho' > \rho$ нужно — иначе брусок всплыл бы.

Проверка. Размерность: $g\cdot$(безразмерная дробь) — м/с^2. Пределы: при $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ брусок держится и без ускорения — формула даёт $a = 0$; при $\mu = 0$ нужно $\beta = \alpha$, $a = g\operatorname{tg}\alpha$ — эффективная сила тяжести перпендикулярна плоскости. Два способа дали 2,3 м/с^2.

Смысл: ускорение сосуда поворачивает «вертикаль» для всего, что в нём, и при достаточном ускорении плоскость становится для бруска достаточно пологой.

Ответ. $a_{\min} = g\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \approx 2{,}3$ м/с^2; ускорение аквариума направлено в сторону, где плоскость опускается (против стрелки на рисунке).