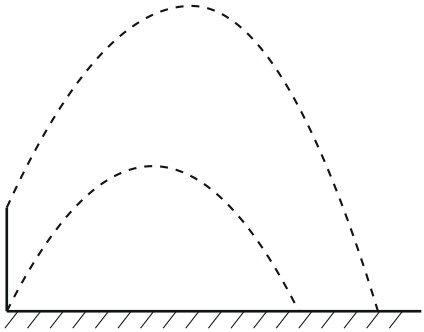
Садовая поливалка

Задача 2. [Курчатов 2024/25, 9 класс, задача 2] Садовая поливалка разбрызгивает капли на 360° в разные стороны. Найдите, во сколько раз вырастет площадь полива, когда поливалку поднимают с уровня земли на высоту $H = 50$ см. Все капли вылетают из поливалки с постоянной скоростью $v = 5$ м/с, сопротивлением воздуха пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача кинематики на движение тела, брошенного под углом к горизонту, с поиском максимума. Капли летят во все стороны и под всеми углами, поэтому поливается весь круг, радиус которого — наибольшая дальность полёта капли $r_{\max}$; площадь $S = \pi r_{\max}^2$, и нужно найти отношение квадратов наибольших дальностей. Угол вылета для этой дальности не задан — его выбирает максимум. Удобно не перебирать углы, а записать перемещение капли векторно: тогда квадрат дальности — квадратичная функция одной переменной, и максимум находится по вершине параболы.

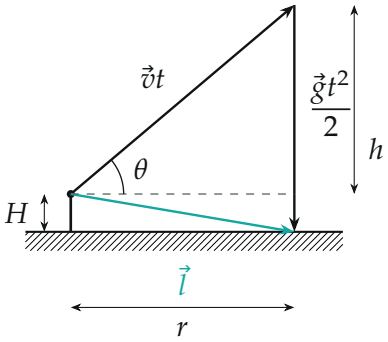
Обозначения. t — время полёта капли до земли; $\vec{l}$ — перемещение капли за это время; r — горизонтальная дальность; h — высота конца вектора $\vec{v}t$ над поливалкой (рисунок 2); $g = 10$ м/с^2.

1. Векторная диаграмма перемещения. При движении с постоянным ускорением $\vec{g}$ перемещение

$$\vec{l} = \vec{v}\,t + \frac{\vec{g}\,t^2}{2}.$$

Сложим векторы на рисунке: из поливалки откладываем $\vec{v}t$ (длина vt, направление вылета), от его конца — вертикально вниз $\vec{g}t^2/2$. Конец второго вектора — точка падения на земле, на H ниже поливалки и на r в стороне. Вертикальный отрезок $gt^2/2$ состоит из подъёма h и спуска H:

$$\frac{gt^2}{2} = H + h \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2(H+h)}{g}.$$



Перемещение капли $\vec{l}$ — сумма $\vec{v}t$ (как если бы тяжести не было) и $\vec{g}t^2/2$ (свободное падение). Нарисовано в масштабе для наилучшего угла $\theta \approx 40°$: $vt = 3{,}87$ м, $h = 2{,}5$ м, $r = 2{,}96$ м.

2. Дальность как функция h. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой vt и катетами r и h по теореме Пифагора

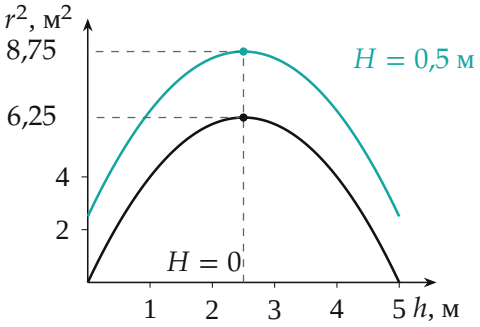
$$r^2 = (vt)^2 - h^2 = \frac{2v^2}{g}(H+h) - h^2 = -h^2 + \frac{2v^2}{g}h + \frac{2v^2H}{g}.$$

Каждому углу вылета соответствует своё h, поэтому выбор наилучшего угла — это выбор наилучшего h.

3. Наибольшая дальность. $r^2(h)$ — парабола ветвями вниз, её вершина при

$$h^* = \frac{v^2}{g} = 2{,}5 \text{ м},$$

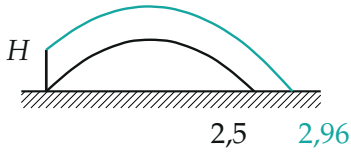
$$r_{\max}^2 = \frac{v^4}{g^2} + \frac{2v^2H}{g} = 6{,}25 + 2{,}5 = 8{,}75 \text{ м}^2, \quad r_{\max} \approx 2{,}96 \text{ м}.$$

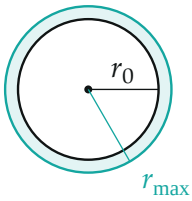


Квадрат дальности как функция h при $v = 5$ м/с: чёрная парабола — поливалка на земле, бирюзовая — на высоте $H = 0{,}5$ м. Вершина у обеих при $h^* = v^2/g = 2{,}5$ м; подъём поливалки сдвигает параболу вверх на $2v^2H/g = 2{,}5$ м^2.

4. Отношение площадей. На земле ($H = 0$) вершина даёт $r_0^2 = v^4/g^2$, $r_0 = 2{,}5$ м (бросок под 45°). Площади кругов полива относятся как квадраты радиусов:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{r_{\max}^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2gH}{v^2} = 1 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 0{,}5}{25} = 1{,}4.$$





Слева — траектории самых далёких капель (по точкам, расстояния в метрах): с земли под 45° (чёрная) и с высоты $H = 0{,}5$ м под 40,2° (бирюзовая). Справа — круги полива сверху; площадь бирюзового круга в 1,4 раза больше.

Обратите внимание. С высоты наилучший угол уже не 45°: $h^* = v^2/g$ даёт $vt\cos\theta = r_{\max}$, $vt\sin\theta = h^*$, откуда $\operatorname{tg}\theta = v/\sqrt{v^2 + 2gH} = 0{,}845$, $\theta \approx 40°$. Ответ 1,4 — отношение площадей, а не радиусов: радиус вырос лишь в $\sqrt{1{,}4} \approx 1{,}18$ раза.

Проверка. Размерность: gH/v^2 безразмерна. Предел: при $H = 0$ отношение равно 1. Второй способ — прямой перебор углов на python: наибольшая дальность с высоты 0,5 м при $v = 5$ м/с равна 2,958 м при $\theta = 40{,}2°$, с земли — 2,500 м; $(2{,}958/2{,}5)^2 = 1{,}40$.

Смысл: высота добавляет капле время полёта, и выгоднее бросать чуть более полого, чем под 45°.

Ответ. $\dfrac{S_2}{S_1} = 1 + \dfrac{2gH}{v^2} = 1{,}4.$