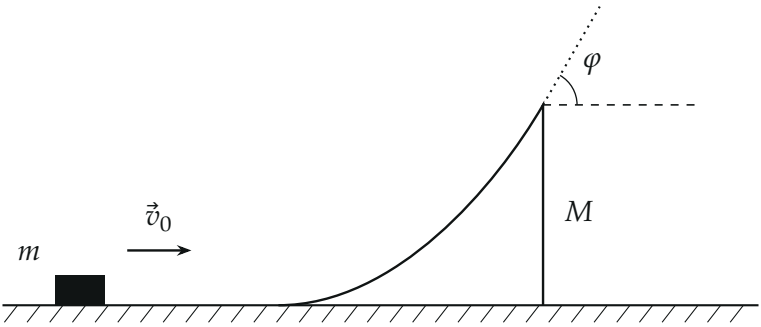
Шайба и шероховатый клин

Задача 3. [Курчатов 2024/25, 9 класс, задача 3] На гладком горизонтальном столе шайба массы m движется со скоростью v_0. На её пути расположен клин массы $M = 11m$, который также может двигаться по столу без трения. Наклонная поверхность клина имеет начальный покатый участок, плавно переходящий в участок с постоянным наклоном к горизонтальной поверхности $\varphi = 60°$. Наклонная часть поверхности клина имеет шероховатости. После прохождения наклонного участка шайба вылетает с верхнего края клина. Найдите, какая доля начальной кинетической энергии шайбы переходит в тепловую энергию в результате трения, если скорость шайбы в момент вылета с клина в системе отсчёта движущегося клина в два раза меньше начальной скорости шайбы в системе отсчёта стола. Высота клина такова, что если сбросить с такой высоты шайбу, её скорость в момент удара о поверхность окажется равной $0{,}4 \cdot v_0$. Ответ представьте в виде дроби.

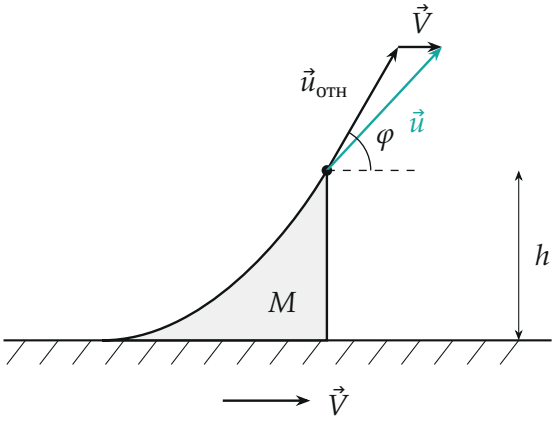


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на законы сохранения в системе тел с неупругим (трением) взаимодействием. Шайба въезжает на клин, тормозится трением и силой тяжести, а клин разгоняется вправо. Стол гладкий: внешних горизонтальных сил нет, поэтому горизонтальная проекция импульса системы «шайба + клин» сохраняется — из неё находим скорость клина V в момент вылета. Механическая энергия не сохраняется: часть уходит в тепло Q из-за трения. Закон сохранения энергии с учётом Q и даёт ответ. Скорость шайбы задана в системе клина — её надо перевести в систему стола по закону сложения скоростей.

Обозначения. $\vec{u}_{\text{отн}}$ — скорость шайбы относительно клина в момент вылета, $u_{\text{отн}} = v_0/2$, направлена вдоль верхнего края склона под углом φ к горизонту; $\vec{u}$ — скорость шайбы относительно стола в этот момент; V — скорость клина (горизонтальна); h — высота клина; Q — выделившееся тепло. Ось x — горизонтально по $\vec{v}_0$, ось y — вверх.

1. Скорость шайбы в системе стола. Закон сложения скоростей: $\vec{u} = \vec{u}_{\text{отн}} + \vec{V}$. В проекциях на оси (вектор $\vec{V}$ горизонтален):

$$u_x = u_{\text{отн}}\cos\varphi + V = \frac{v_0}{4} + V, \qquad u_y = u_{\text{отн}}\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}v_0.$$

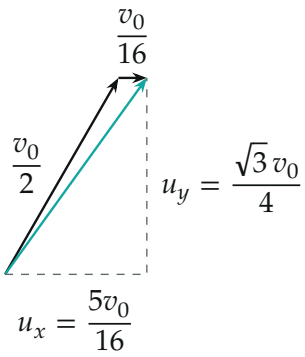


Момент вылета. Клин едет вправо со скоростью $\vec{V}$; относительно клина шайба летит вдоль края склона, $\vec{u}_{отн}$ под углом φ; её скорость относительно стола $\vec{u} = \vec{u}_{отн} + \vec{V}$ (бирюзовая).

2. Скорость клина. Закон сохранения горизонтальной проекции импульса системы «шайба + клин» (стол гладкий, силы тяжести и реакции стола вертикальны) от начала до момента вылета:

$$mv_0 = m\,u_x + MV = m\left(\frac{v_0}{4} + V\right) + 11m\,V \quad \Rightarrow \quad 12V = \frac{3}{4}v_0, \qquad V = \frac{v_0}{16}.$$

Тогда $u_x = \dfrac{v_0}{4} + \dfrac{v_0}{16} = \dfrac{5}{16}v_0$.



Треугольник скоростей в масштабе: $\vec{u}_{отн}$ длиной $v_0/2$ под углом 60° и $\vec{V}$ длиной $v_0/16$; бирюзовая — скорость шайбы относительно стола.

3. Энергии в момент вылета. Квадрат скорости шайбы относительно стола

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 = \left(\frac{25}{256} + \frac{3}{16}\right) v_0^2 = \frac{73}{256}\, v_0^2,$$

кинетические энергии шайбы и клина

$$K_{ш} = \frac{mu^2}{2} = \frac{73}{512}\, mv_0^2, \qquad K_{кл} = \frac{11m\,V^2}{2} = \frac{11}{512}\, mv_0^2.$$

Высота клина — из закона сохранения энергии для шайбы, падающей с высоты h: $mgh = \dfrac{m(0{,}4v_0)^2}{2}$, то есть

$$mgh = 0{,}08\, mv_0^2 = \frac{2}{25}\, mv_0^2.$$

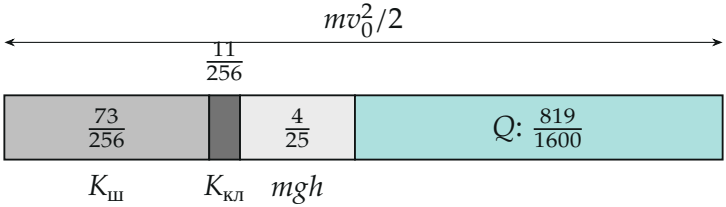
4. Тепло. Закон сохранения энергии для системы «шайба + клин» с учётом работы сил трения (она переходит в тепло Q); потенциальную энергию шайбы отсчитываем от стола:

$$\frac{mv_0^2}{2} = K_{ш} + K_{кл} + mgh + Q,$$

$$Q = \left(\frac{1}{2} - \frac{73}{512} - \frac{11}{512} - \frac{2}{25}\right) mv_0^2 = \left(\frac{172}{512} - \frac{2}{25}\right) mv_0^2 = \frac{819}{3200}\, mv_0^2.$$

Доля начальной кинетической энергии:

$$\frac{Q}{mv_0^2/2} = \frac{819}{1600} \approx 0{,}51.$$



Куда ушла начальная кинетическая энергия шайбы (полоса — $mv_0^2/2$, доли в масштабе): кинетическая энергия шайбы и клина, потенциальная энергия шайбы на высоте h и тепло Q.

Обратите внимание. Скорость $v_0/2$ дана относительно клина — в энергию её подставлять нельзя: кинетическую энергию шайбы считаем по скорости относительно стола $u = \sqrt{73}\,v_0/16$. Вертикальная проекция импульса не сохраняется: стол давит на клин снизу, поэтому закон сохранения импульса — только по горизонтали.

Проверка. Доли энергий в сумме: $\frac{73}{256} + \frac{11}{256} + \frac{4}{25} + \frac{819}{1600} = 0{,}2852 + 0{,}0430 + 0{,}16 + 0{,}5119 = 1$. Знак: $Q > 0$, как и должно быть для трения. Импульс: $m \cdot \frac{5v_0}{16} + 11m \cdot \frac{v_0}{16} = mv_0$.

Смысл: больше половины начальной кинетической энергии шайбы ушло в тепло, на подъём — лишь шестая часть.

Ответ. $\dfrac{Q}{mv_0^2/2} = \dfrac{819}{1600} \approx 0{,}51.$