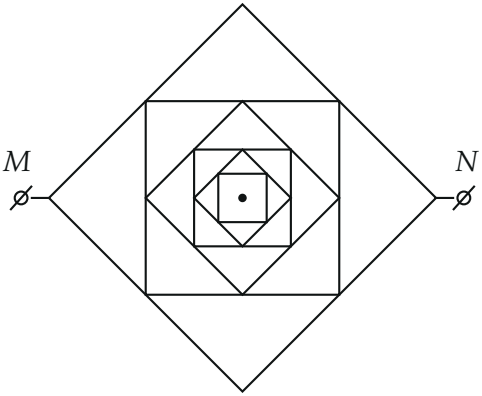
Бесконечная цепь из квадратов

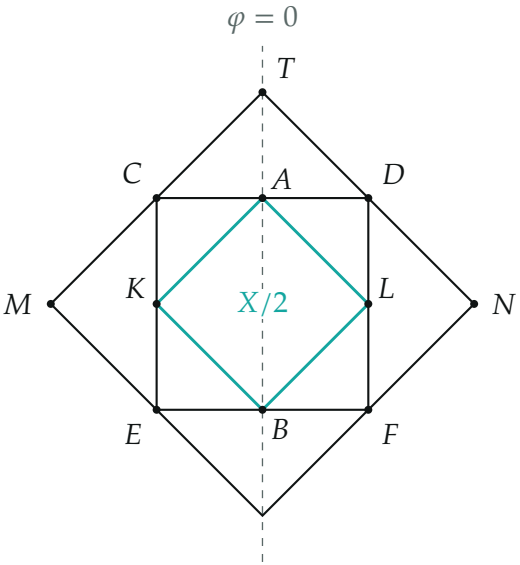
Задача 4. [Курчатов 2024/25, 9 класс, задача 4] Проволочная конструкция состоит из бесконечно большого количества вложенных квадратов (см. рис.). Конструкцию подключают к внешнему напряжению в точках M и N. Сторона наибольшего квадрата равна $a = 10$ см, сопротивление единицы длины проволоки $\rho = 0{,}2$ Ом/см. Найдите общее сопротивление всей конструкции.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сопротивление бесконечной цепи. Приём для таких цепей: часть цепи, начиная с некоторого места, повторяет всю цепь в уменьшенном виде, поэтому её сопротивление выражается через искомое X, и получается уравнение на X. Здесь мешает то, что внутренний ромб касается квадрата в четырёх точках. Симметрия разрешает отсоединить его в верхней и нижней точках — там через стык ток не течёт, — и тогда внутренний ромб подключён только в двух точках, как вся конструкция между M и N.

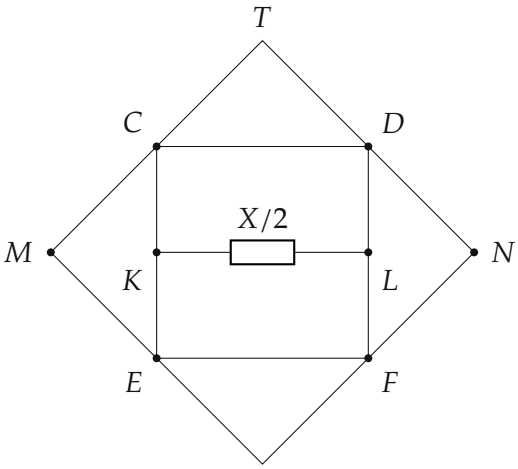
Обозначения. $R = \rho a = 0{,}2 \cdot 10 = 2$ Ом — сопротивление стороны наибольшего (внешнего) ромба; X — искомое сопротивление между M и N. Точки: T — верхняя вершина внешнего ромба; C, D, E, F — вершины квадрата (середины сторон внешнего ромба); K, L — середины левой и правой сторон квадрата; A, B — середины верхней и нижней (рисунок 2). Сторона квадрата $a/\sqrt{2}$, её сопротивление $R/\sqrt{2}$.

1. Подобие. Каждый следующий квадрат построен на серединах сторон предыдущего и меньше его в $\sqrt{2}$ раз, через один — в 2 раза. Внутренний ромб $KALB$ со всем, что внутри, — точная копия всей конструкции, уменьшенная вдвое. Сопротивление проволоки пропорционально длине, поэтому сопротивление этого ромба между вершинами K и L равно $X/2$.



Один «слой» конструкции. Внутренний ромб $KALB$ (бирюзовый) со всем содержимым — копия всей конструкции вдвое меньше, его сопротивление между K и L равно $X/2$. Штриховая — ось симметрии, на ней потенциал равен полусумме потенциалов M и N (примем его за ноль).

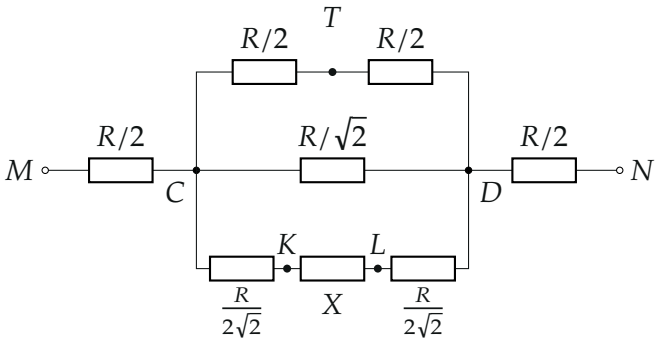
2. Почему ромб можно отсоединить в A и B. Подадим на M потенциал $+U/2$, на N — $-U/2$. Отразим цепь относительно вертикальной оси и одновременно поменяем знаки всех потенциалов: получится та же цепь с теми же условиями на M и N, значит, и распределение токов то же. Точки A и B лежат на оси и переходят сами в себя, а ток через стык «верх квадрата — ромб» в точке A при этом преобразовании меняет знак. Величина, равная самой себе со знаком минус, — ноль: ток через стык в A (и в B) не течёт, и стык можно разорвать. Внутренний ромб остаётся подключённым только в K и L.



После разрыва стыков в A и B внутренний ромб — один резистор $X/2$ между серединами K и L боковых сторон квадрата.

3. Половина цепи. Цепь на рисунке 3 симметрична относительно прямой MN. Разрежем её по этой прямой: резистор $X/2$ — это два параллельных резистора по X (верхний и нижний), а через точки K, L, M, N ток поперёк прямой не перетекает (потенциалы симметричных точек равны). Каждая половина имеет сопротивление $2X$ — две одинаковые параллельные половины дают X. Верхняя половина (рисунок 4):

- MC и DN — половины сторон внешнего ромба, по $R/2$;
- между C и D параллельно: путь $C\,T\,D$ (две половины сторон ромба, R) и сторона квадрата CD ($R/\sqrt{2}$);
- ещё параллельно им путь $C\,K\,L\,D$: $\dfrac{R}{2\sqrt{2}} + X + \dfrac{R}{2\sqrt{2}} = \dfrac{R}{\sqrt{2}} + X$.



Верхняя половина цепи, её сопротивление $2X$. Средний и верхний провода между C и D заменяются одним резистором $R_1 = (\sqrt{2}-1)R$.

4. Уравнение на X. Параллельные R и $R/\sqrt{2}$:

$$R_1 = \frac{R \cdot R/\sqrt{2}}{R + R/\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)R.$$

Сопротивление верхней половины — последовательно $R/2$, параллельные R_1 и $R/\sqrt{2} + X$, ещё $R/2$:

$$2X = R + \frac{R_1\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + X\right)}{R_1 + \frac{R}{\sqrt{2}} + X}.$$

Обозначим $x = X/R$, $k = \sqrt{2} - 1$, умножим на знаменатель:

$$(2x-1)\left(k + \frac{1}{\sqrt{2}} + x\right) = k\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + x\right) \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2kx - \sqrt{2} = 0,$$

(коэффициенты: $k + \sqrt{2} - 1 = 2k$, $k + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$), то есть

$$X^2 + (\sqrt{2}-1)RX - \frac{\sqrt{2}}{2}R^2 = 0.$$

Дискриминант: $(\sqrt{2}-1)^2 + 2\sqrt{2} = 3$. Отрицательный корень отбрасы-

ваем (сопротивление положительно):

$$X = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}\,R = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}\,\rho a = 0{,}659 \cdot 2\ \text{Ом} \approx 1{,}3\ \text{Ом}.$$

Обратите внимание. Разрывать стык можно только там, где через него не течёт ток; равенство потенциалов двух точек разрешает соединить их проводом, а отсоединение ромба в A и B обосновывает именно нулевой ток через стык. Сопротивление уменьшенной вдвое копии — $X/2$, а не $X/\sqrt{2}$: подобна вся конструкция ромбу $KALB$, сторона которого $a/2$.

Проверка. Размерность: $X \propto \rho a$ — омы. Оценки: X меньше сопротивления пути MTN ($2R = 4$ Ом) и больше $R/2$; к тому же без внутренних квадратов (только ромб) было бы $X = R = 2$ Ом, внутренние проводники уменьшают его — 1,32 Ом. Независимая проверка: решение системы законов Кирхгофа на python для 24 вложенных квадратов (около 200 узлов) даёт $X/R = 0{,}65892$, формула — 0,65892.

Смысл: бесконечная цепь «замыкается на себя» — уравнение на X получается из того, что часть цепи подобна целому.

Ответ. $X = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}\,\rho a \approx 1{,}3$ Ом.