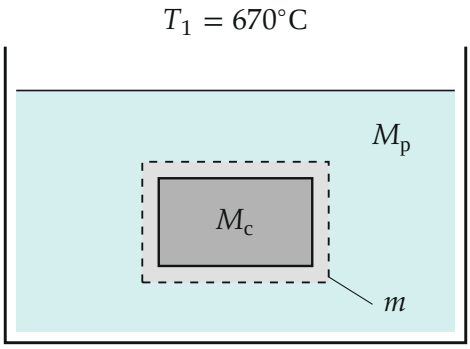
Слиток в расплаве алюминия

Задача 5. [Курчатов 2024/25, 9 класс, задача 5] В ёмкость с расплавом алюминия при температуре $T_1 = 670°\text{C}$ погрузили слиток алюминия при температуре $T_2 = 500°\text{C}$. После установления теплового равновесия слиток извлекли из расплава и обнаружили, что его масса увеличилась на 5%. На сколько процентов уменьшилась масса алюминия в расплаве? Считать, что удельная теплоёмкость алюминия одинакова для расплава и слитка и равна $C_a = 920$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления $\lambda = 390$ кДж/кг, а температура плавления $T_{\text{пл}} = 660°\text{C}$. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Ответ округлите до сотых долей процента.

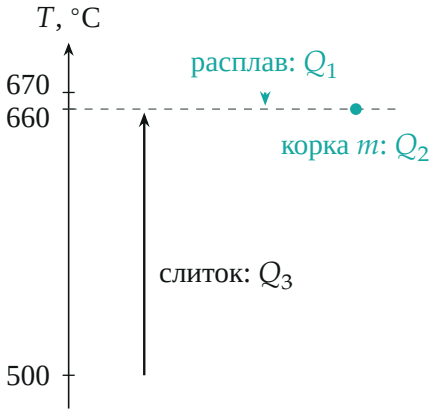


Поясняющий рисунок. Слиток M_c (тёмный) при 500°C в расплаве M_p; на нём намерзает корка массы m (светлая, штриховой контур).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса с фазовым переходом. Холодный слиток охлаждает прилегающий расплав, и тот кристаллизуется на поверхности слитка — поэтому масса слитка растёт. Главное — понять конечное состояние: в конце есть и твёрдый алюминий (слиток с коркой), и жидкий (расплав), а две фазы одного вещества в равновесии сосуществуют только при температуре плавления. Значит, конечная температура известна: 660°C. Дальше — тепловой баланс: тепло отдают остывающий расплав и кристаллизующаяся часть, получает нагревающийся слиток.

Обозначения. $M_р$ — начальная масса расплава; $M_с$ — начальная масса слитка; m — масса алюминия, перешедшая из расплава в слиток; по условию $m = 0{,}05\,M_с$. Искомое — $m/M_р$.

1. Конечная температура. Если бы конечная температура была выше 660°C, твёрдого алюминия не осталось бы — а слиток извлекли, и он даже потяжелел. Если ниже — не осталось бы жидкого, а расплав в ёмкости есть. Поэтому $T_к = T_{пл} = 660°C$.



Шкала температур: слиток нагревается от 500 до 660°C (получает Q_3), расплав остывает от 670 до 660°C (отдаёт Q_1), корка т кристаллизуется при 660°C (отдаёт Q_2).

2. Количества теплоты. Весь расплав (включая будущую корку) остывает от T_1 до $T_{пл}$:

$$Q_1 = C_a M_р (T_1 - T_{пл}) = 920 \cdot 10\,M_р = 9200\,M_р.$$

Кристаллизуется масса m, выделяя

$$Q_2 = \lambda m = 390\,000 \cdot 0{,}05\,M_с = 19\,500\,M_с.$$

Слиток нагревается от T_2 до $T_{пл}$:

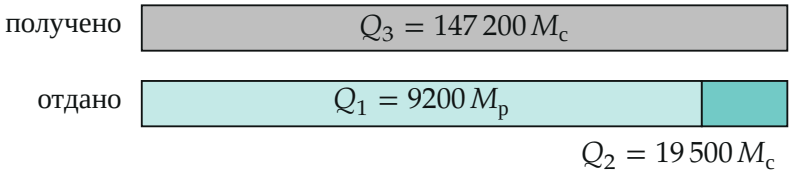
$$Q_3 = C_a M_с (T_{пл} - T_2) = 920 \cdot 160\,M_с = 147\,200\,M_с.$$

(Здесь и выше массы — в килограммах, теплота — в джоулях.)

3. Тепловой баланс. Теплообмена с окружающей средой нет, поэтому сколько тепла отдано, столько получено:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad \Rightarrow \quad 9200\,M_\text{р} + 19\,500\,M_\text{с} = 147\,200\,M_\text{с},$$

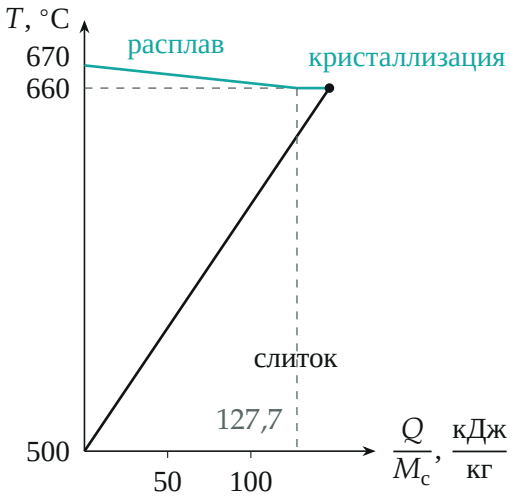
$$\frac{M_\text{р}}{M_\text{с}} = \frac{127\,700}{9200} \approx 13{,}88.$$



Баланс тепла в масштабе (на 1 кг слитка): полученное слитком тепло Q_3 покрывают тепло кристаллизации корки Q_2 (всего 13%) и тепло остывающего расплава Q_1 — отсюда $M_р = 13{,}88\,M_с$.

4. Убыль массы расплава. Расплав потерял массу m, относительно исходной

$$\frac{m}{M_\text{р}} = \frac{m}{M_\text{с}} \cdot \frac{M_\text{с}}{M_\text{р}} = 0{,}05 \cdot \frac{9200}{127\,700} = \frac{460}{127\,700} \approx 0{,}00360 = 0{,}36\%.$$



Температура слитка (чёрная) и расплава (бирюзовая) в зависимости от переданного тепла Q в расчёте на 1 кг слитка. Расплав остывает до 660°C, отдав 127,7 кДж, остальные 19,5 кДж даёт кристаллизация корки при постоянной температуре; линии сходятся при 147,2 кДж.

Обратите внимание. Остывает весь расплав $M_р$, в том числе та часть, что потом станет коркой: она тоже сначала остывает от 670 до 660°C, поэтому в Q_1 стоит $M_р$, а не $M_р - m$. Проценты — от массы расплава, а не слитка: 5% от слитка — это лишь 0,36% от в 13,9 раза большей массы расплава.

Проверка. Размерность: в балансе Дж/(кг·°C)·°C·кг и (Дж/кг)·кг — джоули. Подстановка: $9200 \cdot 13{,}88 + 19\,500 \approx 127\,700 + 19\,500 = 147\,200$. Предел: при $\lambda \to 0$ ничего бы не намерзало «за тепло» и $M_р/M_с = 160/10 = 16$ — расплав отдаёт тепло только остыванием; при нашем λ кристаллизация берёт на себя часть работы, и расплава нужно меньше. Независимый пересчёт на python: $0{,}05 \cdot 9200/127\,700 = 0{,}003602$.

Смысл: огромная масса расплава лишь чуть-чуть остывает, а тепло, нужное холодному слитку, частично добирается намерзанием корки.

Ответ. Масса расплава уменьшилась на $\dfrac{m}{M_р} = \dfrac{0{,}05\,C_a(T_1 - T_{пл})}{C_a(T_{пл} - T_2) - 0{,}05\lambda} \approx 0{,}36\%$.