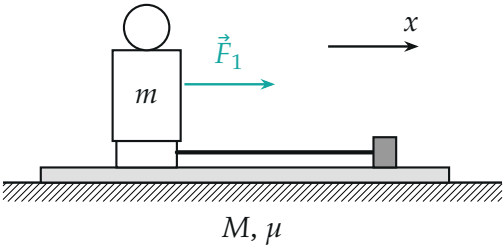
Глюк на доске

Задача 1. [Курчатов 2025/26, 10 класс, задача 1] Экспериментатор Глюк сидит на доске. Его ступни закреплены на доске, трения между ним и доской нет, а коэффициент трения скольжения между доской и землёй равен μ. Глюк исходно сидит в положении с вытянутыми ногами. Вначале Глюк тянет ноги на себя, прикладывая постоянную горизонтальную силу F_1, чтобы приблизить свой центр масс к ступням. Когда Глюк оказывается в положении с согнутыми коленями, его скорость относительно доски мгновенно становится равной нулю за счёт действия внутренних сил, при помощи которых ступни Глюка закреплены на доске. За этот процесс перемещение его центра масс относительно центра масс доски равно ℓ. После этого они движутся как единое целое до полной остановки.

Затем Глюк отталкивается от доски с постоянной горизонтальной силой F_2, чтобы вернуться в положение с вытянутыми ногами. Как только ноги выпрямлены, скорость Глюка относительно доски мгновенно становится равной нулю. После этого система вновь движется как единое целое до полной остановки. Найдите смещение центра масс системы «Глюк+доска» за всё время движения. Масса человека равна m, масса доски равна M. Предполагается, что во время перехода между положениями вертикальная составляющая силы, действующей на ступни Глюка, отсутствует, при этом модули сил связаны неравенством $F_2 > F_1$. Ускорение свободного падения g.

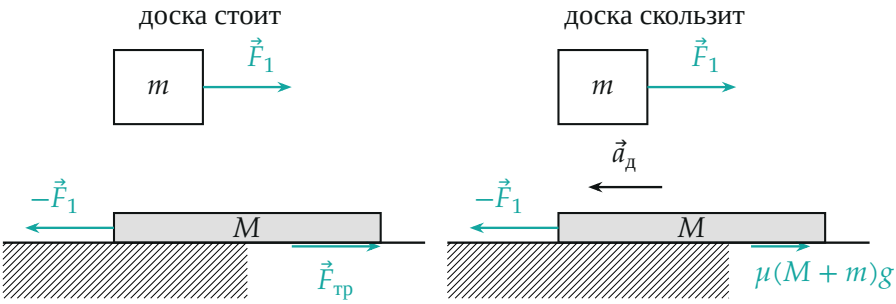


Поясняющий рисунок: Глюк с вытянутыми ногами, ступни закреплены у правого края доски (тёмный упор). В первом действии он подтягивается к ступням (вправо), во втором — отталкивается назад.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон движения центра масс системы с трением. Внутренние силы (тяга ног F_1, F_2 и мгновенная «сцепка» в конце каждого действия) центр масс системы «Глюк + доска» не двигают; его двигает только внешняя горизонтальная сила — трение земли о доску. Поэтому весь вопрос — какая сила трения и как долго действует. В каждом действии два варианта: доска стоит (трение покоя равно тяге) или скользит (трение скольжения $\mu(M+m)g$). Смещение центра масс за действие найдём по графику его скорости.

Обозначения. Ось x — в сторону ступней (вправо, положительное смещение — туда), a_c, v_c — ускорение и скорость центра масс системы, $N = (M+m)g$ — сила нормальной реакции земли (вертикальной силы на ступнях нет, Глюк сидит на доске), $a_{\text{отн}}$ — ускорение Глюка относительно доски. Действие 1 — подтягивание, действие 2 — отталкивание.

1. Силы. Доска действует на Глюка через ступни силой $\vec{F}_1$ (вправо), по третьему закону Ньютона Глюк тянет доску силой $-\vec{F}_1$ (влево). Вертикально на Глюка действуют сила тяжести и реакция доски — они уравновешены. На доску снаружи — сила тяжести, реакция земли N и трение $\vec{F}_{\text{тр}}$ (вправо: доска стремится уехать влево).



Горизонтальные силы в действии 1. Слева трение покоя уравновешивает F_1; справа его не хватает, и доска едет влево с ускорением $\vec{a}_{\text{д}}$. Вертикальные силы не показаны.

Закон движения центра масс системы (второй закон Ньютона для системы, внутренние силы $\pm\vec{F}_1$ сокращаются):

$$(M+m)\,a_c = F_{\text{тр}}.$$

2. Действие 1, доска стоит. Доска стоит, пока нужная ей сила трения покоя $F_{\text{тр}} = F_1$ не превышает μN: условие $\mu \geq \dfrac{F_1}{(M+m)g}$.

Разгон. Глюк движется с ускорением F_1/m и проходит относительно неподвижной доски путь ℓ; его скорость в конце $v_1 = \sqrt{2F_1\ell/m}$. Центр масс системы за это время сместился на $\dfrac{m\ell}{M+m}$ (сдвинулся только Глюк).

Сцепка. Внутренние силы мгновенно уравнивают скорости; трение конечно и за мгновение импульса не меняет — закон сохранения импульса системы: $mv_1 = (M+m)v_{c1}$.

Торможение. Дальше система — одно тело, скользит вправо с замедлением μg и проходит $\dfrac{v_{c1}^2}{2\mu g} = \dfrac{m^2 \cdot 2F_1\ell/m}{2\mu g(M+m)^2}$. Итого за действие 1

$$x_{c1} = \frac{m\ell}{M+m} + \frac{F_1 m\ell}{\mu g(M+m)^2}.$$

3. Действие 1, доска скользит. При $\mu < \dfrac{F_1}{(M+m)g}$ доска едет влево, трение скольжения на неё направлено вправо и равно $\mu(M+m)g$. Тогда $a_c = \mu g$ (вправо) с самого начала. Второй закон Ньютона для доски и для Глюка в проекции на x:

$$Ma_{\text{дх}} = -F_1 + \mu(M+m)g, \qquad ma_{\text{чх}} = F_1.$$

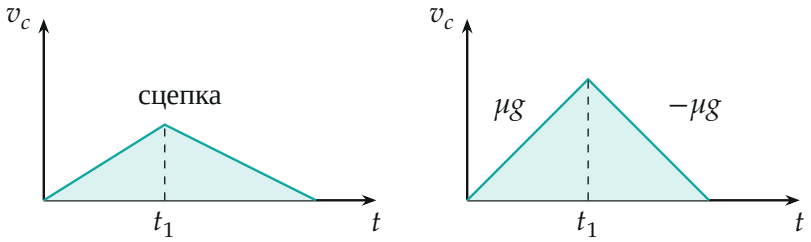
Ускорение Глюка относительно доски

$$a_{\text{отн}} = \frac{F_1}{m} + \frac{F_1 - \mu(M+m)g}{M} = \frac{(M+m)(F_1 - \mu mg)}{Mm}.$$

Путь ℓ он проходит за время $t_1 = \sqrt{\dfrac{2\ell}{a_{\text{отн}}}}$, к его концу $v_{c1} = \mu g\, t_1$ (сцепка импульс системы не меняет). Дальше торможение с тем же модулем ускорения μg и за то же время. На графике $v_c(t)$ — равнобедренный

треугольник (рисунок 4), его площадь

$$x'_{c1} = \mu g\, t_1^2 = \frac{2\mu g\ell}{a_{\text{отн}}} = \frac{2\mu M m g\ell}{(M+m)(F_1 - \mu m g)}.$$



доска стоит доска скользит

Скорость центра масс в действии 1. Смещение — площадь под графиком. Слева разгон медленный ($F_1/(M+m) < \mu g$), торможение μg; справа разгон и торможение одинаковы.

4. Действие 2. Всё то же с заменой $F_1 \to F_2$ и сменой направления: Глюк отталкивается влево, доска стремится вправо, трение на неё — влево. Смещения центра масс отрицательны:

$$x_{c2} = -\frac{m\ell}{M+m} - \frac{F_2 m\ell}{\mu g(M+m)^2} \quad (\text{стоит, } \mu \geq \tfrac{F_2}{(M+m)g}),$$

$$x'_{c2} = -\frac{2\mu M m g\ell}{(M+m)(F_2 - \mu m g)} \quad (\text{скользит}).$$

После каждого действия система успевает остановиться, поэтому действия независимы.

5. Три режима. Так как $F_2 > F_1$, порог скольжения во втором действии выше, и сочетаний три (рисунок 5). Полное смещение $X = x_{c1} + x_{c2}$:

а) $\mu \geq F_2/[(M+m)g]$ — доска стоит в обоих действиях:

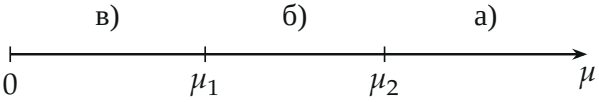
$$X = \frac{(F_1 - F_2)\, m\ell}{\mu g(M+m)^2};$$

б) $F_1/[(M+m)g] \le \mu < F_2/[(M+m)g]$ — в первом стоит, во втором скользит:

$$X = \frac{m\ell}{M+m} + \frac{F_1 m\ell}{\mu g(M+m)^2} - \frac{2\mu M m g\ell}{(M+m)(F_2-\mu m g)};$$

в) $0 < \mu < F_1/[(M+m)g]$ — скользит в обоих:

$$X = \frac{2\mu M m g\ell}{M+m}\left(\frac{1}{F_1-\mu m g} - \frac{1}{F_2-\mu m g}\right).$$



Пороги $\mu_1 = F_1/[(M+m)g]$ и $\mu_2 = F_2/[(M+m)g]$. Режимы: в) скользит в обоих действиях, б) стоит, потом скользит, а) стоит в обоих.

Обратите внимание. Пока доска скользит, трение равно $\mu(M+m)g$ независимо от силы F, и центр масс разгоняется с ускорением μg — *в сторону, куда тянется Глюк*.

Проверка. Размерность: $\dfrac{F\ell}{\mu g(M+m)}$ и $\dfrac{\mu M g\ell}{F}$ — длины, умноженные на безразмерное. Непрерывность на границе $\mu = F_1/[(M+m)g]$: тогда $F_1 - \mu m g = \mu M g$, и $x'_{c1} = \dfrac{2m\ell}{M+m}$, а $x_{c1} = \dfrac{m\ell}{M+m} + \dfrac{m\ell}{M+m}$ — то же самое. Предел $\mu \to 0$: в режиме в) $X \to 0$. Знак: в режиме а) $X < 0$ — более сильный толчок назад сдвигает систему дальше.

Ответ. $X = \dfrac{(F_1-F_2)\,m\ell}{\mu g(M+m)^2}$ при $\mu \ge F_2/[(M+m)g]$; $X = \dfrac{m\ell}{M+m} + \dfrac{F_1 m\ell}{\mu g(M+m)^2} - \dfrac{2\mu M m g\ell}{(M+m)(F_2-\mu m g)}$ при $F_1/[(M+m)g] \le \mu < F_2/[(M+m)g]$; $X = \dfrac{2\mu M m g\ell}{M+m}\left(\dfrac{1}{F_1-\mu m g} - \dfrac{1}{F_2-\mu m g}\right)$ при $\mu < F_1/[(M+m)g]$.