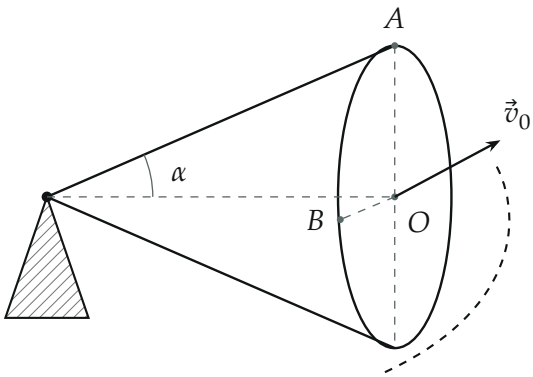
Конус на плоскости

Задача 2. [Курчатов 2025/26, 10 класс, задача 2] Конус с радиусом основания r и углом полураствора $\alpha = 30°$ (см. рис.) катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности так, что его вершина остаётся неподвижной, а ось конуса горизонтальна. Точка O в центре основания конуса движется с постоянной по модулю скоростью v_0. Найдите отношение v_A/v_B скорости точки A конуса к скорости точки B конуса относительно поверхности.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику твёрдого тела. Вершина конуса неподвижна, и точка конуса, касающаяся поверхности, тоже неподвижна (нет проскальзывания). Две неподвижные точки задают мгновенную ось вращения — прямую через вершину и точку касания. Значит, в каждый момент конус просто вращается вокруг этой оси с некоторой угловой скоростью ω, и скорость любой точки равна ω, умноженной на её расстояние до оси. Отношение скоростей — отношение расстояний.

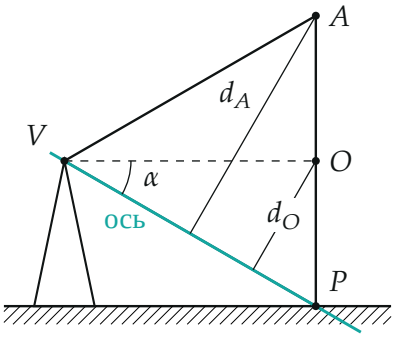
Обозначения. V — вершина, P — нижняя точка основания, которой конус касается поверхности (вершина поднята на подставке на высоту r, так что образующая VP наклонена к поверхности и касается её только в P). A — верхняя точка основания, B — точка основания на горизонтальном диаметре (сбоку, см. рисунок условия). $h = r\operatorname{ctg}\alpha$ — высота конуса, $L = VP = r/\sin\alpha$ — образующая.

1. Мгновенная ось и угловая скорость. Ось вращения — прямая VP (рисунок 2, вид сбоку в вертикальной плоскости через ось конуса). Она наклонена к оси конуса VO на угол α. Расстояние от O до прямой VP — катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $VO = h$ и углом α при V:

$$d_O = h\sin\alpha = r\cos\alpha.$$

Скорость точки O $v_0 = \omega d_O$, откуда

$$\omega = \frac{v_0}{r\cos\alpha}.$$



Вид сбоку: мгновенная ось VP (бирюзовая) проходит через вершину и точку касания. Перпендикуляры из O и A на неё: $d_O = r\cos\alpha$, $d_A = 2r\cos\alpha$.

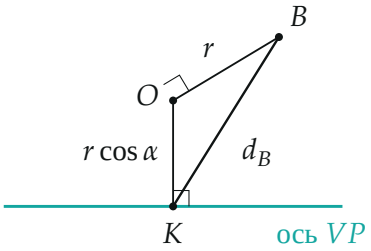
2. Скорость точки A. Точки P, O, A лежат на одном вертикальном диаметре основания, $PA = 2PO$. Расстояние до прямой, проходящей через P, пропорционально расстоянию от P вдоль одной прямой: $d_A = 2d_O = 2r\cos\alpha$. Поэтому

$$v_A = \omega \cdot 2r\cos\alpha = 2v_0.$$

3. Скорость точки B. Точка B лежит в плоскости основания на горизонтальном диаметре, на расстоянии r от O в сторону, перпендикулярную плоскости рисунка 2. Отрезок OB перпендикулярен плоскости VOP, в которой лежит ось. Расстояние от B до оси — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами $OB = r$ (поперёк плоскости) и

$d_O = r\cos\alpha$ (в плоскости, до оси) (рисунок 3):

$$d_B = \sqrt{r^2 + r^2\cos^2\alpha} = r\sqrt{1+\cos^2\alpha}, \qquad v_B = \omega d_B = v_0\,\frac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$



Расстояние от B до оси: K — основание перпендикуляра из O на ось, $OK = r\cos\alpha$; $OB = r$ перпендикулярен плоскости VOP, значит, перпендикулярен и OK, и оси; плоскость OKB перпендикулярна оси, и KB — расстояние от B до оси.

4. Отношение.

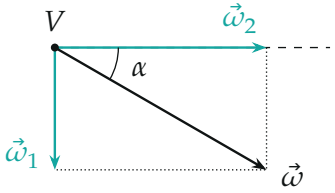
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7} \approx 1{,}31.$$

5. Второй способ: сложение вращений. Движение конуса — поворот вокруг вертикали через вершину с угловой скоростью $\omega_1 = v_0/h$ (точка O идёт по окружности радиуса h) плюс вращение вокруг собственной оси с ω_2. Точка касания P неподвижна: от первого вращения у неё скорость $\omega_1 h$ (она на расстоянии h от вертикали), от второго — $\omega_2 r$ навстречу, значит, $\omega_2 = \omega_1 h/r = v_0/r$. Векторы $\vec{\omega}_1$ (вертикально) и $\vec{\omega}_2$ (вдоль оси конуса) перпендикулярны (рисунок 4):

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{v_0}{r}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \frac{v_0}{r\cos\alpha},$$

и tg угла вектора $\vec{\omega}$ с осью конуса $= \omega_1/\omega_2 = \operatorname{tg}\alpha$ — он направлен вдоль образующей VP, как и должна идти мгновенная ось. Совпало с

пунктом 1.



Сложение угловых скоростей (вид сбоку): $\vec{\omega}_2$ вдоль оси конуса, $\vec{\omega}_1$ вертикально (при таком направлении обхода — вниз); сумма $\vec{\omega}$ идёт вдоль образующей VP под углом α.

Обратите внимание. Ответ $v_A = 2v_0$ нельзя переносить на точку B «по аналогии»: B не лежит в плоскости, где ось, и её расстояние до оси считается через пространственный прямоугольный треугольник. Точка B при этом не самая быстрая: быстрее всех точка A.

Проверка. Отношение безразмерно. Предел $\alpha \to 0$ (длинный тонкий конус, почти цилиндр, катящийся по прямой): $\dfrac{v_A}{v_B} \to \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ — как у колеса: верх движется со скоростью $2v_0$, боковая точка — $\sqrt{2}\,v_0$. При $\alpha = 30^\circ$ получаем $1{,}31 < \sqrt{2}$.

Ответ. $\dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{2\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7} \approx 1{,}31.$