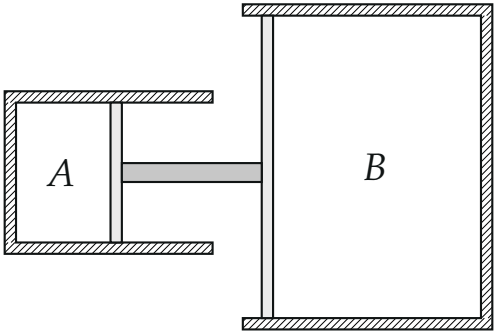
Поршни двух цилиндров на стержне

Задача 3. [Курчатов 2025/26, 10 класс, задача 3] Поршни двух цилиндров A и B соединены съёмным невесомым жёстким стержнем. Поршни, стенки цилиндров и стержень не проводят теплоту. Поршни могут свободно скользить без трения. Площади поперечного сечения цилиндров равны S_0 и $4S_0$ соответственно. В цилиндре B имеется электронагреватель. Атмосферное давление p_0. Универсальная газовая постоянная R.

При снятом стержне в каждый из цилиндров A и B помещено ν_0 моль одноатомного идеального газа при температуре T_0. Затем устанавливают стержень таким образом, что в момент установки механическое напряжение в нём отсутствует. После этого включают нагреватель, который подводит тепло с достаточно малой мощностью, так что температура газа в цилиндре B медленно повышается на ΔT (при этом $\Delta T \ll T_0$), после чего нагрев прекращают.



1. Найдите температуру и давление газа в цилиндре A после окончания нагревания.
2. Найдите полное количество теплоты, подведённое системе в процессе нагревания.

Примечание: при $x \ll 1$ справедлива формула приближённых вычислений $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

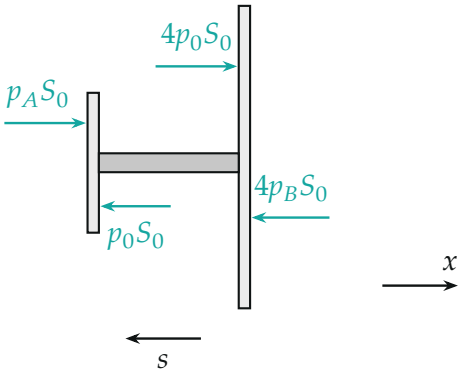
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики и адиабатный процесс в связанных поршнях. Газ B нагревается и расширяется, толкает поршень B влево, стержень сдвигает поршень A

тоже влево и сжимает газ A. Тепло в A не поступает, и процесс медленный — газ A сжимается адиабатно. Связи две: силы (равновесие поршней со стержнем) связывают давления, жёсткий стержень — перемещения. Изменения малы, поэтому все уравнения линеаризуем.

Обозначения. Ось x — вправо. s — сдвиг поршней влево; объём A уменьшается на $\Delta V_A = S_0 s$, объём B растёт на $\Delta V_B = 4S_0 s = 4\Delta V_A$. Начальные объёмы $V_0 = \dfrac{\nu_0 R T_0}{p_0}$ у обоих газов (давление до установки стержня атмосферное). Δp_A, Δp_B — приросты давлений, ΔT_A — прирост температуры в A; $\gamma = \dfrac{5}{3}$ — показатель адиабаты одноатомного газа.

1. Равновесие поршней. Поршни и стержень невесомы и движутся медленно — сумма сил на систему «поршень A + стержень + поршень B» равна нулю. В проекции на ось x: газ A давит на свой поршень вправо, атмосфера на него — влево; газ B давит на свой поршень влево, атмосфера — вправо:

$$p_A S_0 - p_0 S_0 - 4p_B S_0 + 4p_0 S_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p_A = 4\,\Delta p_B.$$



Силы давления на поршни со стержнем. Слева от поршня A — газ A, справа — атмосфера; слева от поршня B — атмосфера, справа — газ B. Внизу — направление сдвига поршней s.

2. Газ A — адиабата. Тепла нет, сжатие медленное: $p_A V_A^\gamma = p_0 V_0^\gamma$. С

$V_A = V_0 - \Delta V_A$ и формулой из условия:

$$p_A = p_0\left(1 - \frac{\Delta V_A}{V_0}\right)^{-\gamma} \approx p_0\left(1 + \gamma\frac{\Delta V_A}{V_0}\right), \qquad \Delta p_A = \gamma p_0 \frac{\Delta V_A}{V_0}.$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_A V_A = \nu_0 R T_A$ в первом порядке малости $V_0\Delta p_A - p_0\Delta V_A = \nu_0 R \Delta T_A$:

$$\nu_0 R\,\Delta T_A = (\gamma - 1)\,p_0 \Delta V_A.$$

3. Газ B**.** Уравнение Менделеева — Клапейрона $p_B V_B = \nu_0 R(T_0 + \Delta T)$ в первом порядке:

$$V_0\,\Delta p_B + p_0 \cdot 4\Delta V_A = \nu_0 R\,\Delta T.$$

Подставим $\Delta p_B = \Delta p_A/4 = \dfrac{\gamma p_0 \Delta V_A}{4V_0}$:

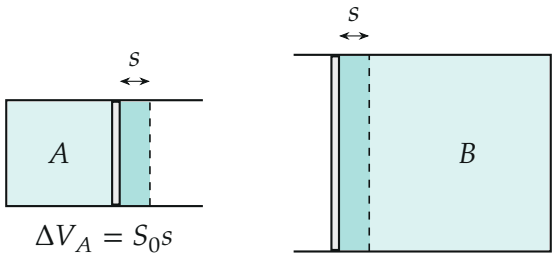
$$p_0\Delta V_A\left(\frac{\gamma}{4} + 4\right) = \nu_0 R\,\Delta T \quad \Rightarrow \quad p_0\Delta V_A = \frac{4\nu_0 R\,\Delta T}{16 + \gamma} = \frac{12}{53}\,\nu_0 R\,\Delta T.$$

Пункт 1. Температура и давление в A**.**

$$\Delta T_A = \frac{(\gamma - 1)p_0\Delta V_A}{\nu_0 R} = \frac{2}{3}\cdot\frac{12}{53}\Delta T = \frac{8}{53}\Delta T, \qquad T_A = T_0 + \frac{8}{53}\Delta T.$$

$$p_A = p_0\left(1 + \gamma\frac{\Delta V_A}{V_0}\right) = p_0\left(1 + \frac{5}{3}\cdot\frac{12}{53}\frac{\Delta T}{T_0}\right) = p_0\left(1 + \frac{20}{53}\frac{\Delta T}{T_0}\right)$$

(учтено $p_0 V_0 = \nu_0 R T_0$).

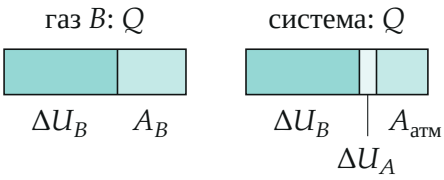


Жёсткий стержень сдвигает оба поршня на одно и то же s (пунктир — прежнее положение). Объём A уменьшается на $S_0 s$, объём B растёт вчетверо больше: $\Delta V_B = 4\Delta V_A$.

Пункт 2. Теплота. Первое начало термодинамики для газа B (тепло подводится только к нему): $Q = \Delta U_B + A_B$. Работа газа B при малом расширении $A_B \approx p_0 \cdot 4\Delta V_A$ (поправка от Δp_B — второго порядка малости):

$$Q = \frac{3}{2}\nu_0 R\,\Delta T + 4 \cdot \frac{12}{53}\nu_0 R\,\Delta T = \left(\frac{3}{2} + \frac{48}{53}\right)\nu_0 R\,\Delta T = \frac{255}{106}\,\nu_0 R\,\Delta T.$$

Второй способ (вся система). Первое начало для двух газов вместе: $Q = \Delta U_A + \Delta U_B + A_{\text{на атм}}$, где работа против атмосферы $A_{\text{на атм}} = p_0(\Delta V_B - \Delta V_A) = 3p_0\Delta V_A = \frac{36}{53}\nu_0 R\Delta T$, $\Delta U_A = \frac{3}{2}\nu_0 R\Delta T_A = \frac{12}{53}\nu_0 R\Delta T$. Сумма: $\left(\frac{12}{53} + \frac{3}{2} + \frac{36}{53}\right)\nu_0 R\Delta T = \frac{255}{106}\nu_0 R\Delta T$ — то же.



Куда уходит теплота (в единицах $\nu_0 R\Delta T$, в масштабе): газу B — $\frac{3}{2}$, работа газа B — $\frac{48}{53}$; в масштабе всей системы та же работа делится на нагрев газа A ($\frac{12}{53}$) и работу против атмосферы ($\frac{36}{53}$).

Обратите внимание. Давления газов меняются по-разному: $\Delta p_A = 4\Delta p_B$ — поршни разной площади, и одинаковая сила в стержне даёт разные добавки давления. Взять $\Delta p_A = \Delta p_B$ — значит получить неверный коэффициент $\frac{4}{4+\gamma}$ вместо $\frac{4}{16+\gamma}$.

Проверка. Размерности: ΔT_A — кельвины, p_A/p_0 безразмерно, Q — джоули. Знак: газ A сжимается адиабатно — нагревается и сжимается, $\Delta T_A > 0$, $\Delta p_A > 0$. Предел: если бы давление в B не росло (газ A не сопротивлялся бы сжатию), Q было бы $\frac{5}{2}\nu_0 R\Delta T = \frac{265}{106}\nu_0 R\Delta T$ — изобарный нагрев; у нас чуть меньше, потому что давление в B немного растёт и газ B расширяется меньше.

Ответ. 1) $T_A = T_0 + \dfrac{8}{53}\Delta T$, $p_A = p_0\left(1 + \dfrac{20\,\Delta T}{53\,T_0}\right)$; 2) $Q = \dfrac{255}{106}\,\nu_0 R\,\Delta T$.