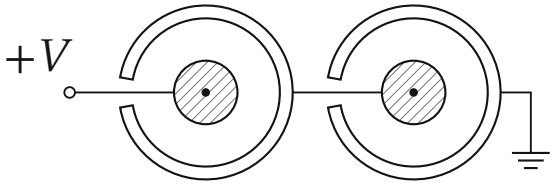
Сферический конденсатор

Задача 4. [Курчатов 2025/26, 10 класс, задача 4] Сферический конденсатор состоит из проводящего сферического слоя со внутренним радиусом b и толщиной стенок d и металлического шара радиуса a. Центры сферического слоя и шара совпадают. Электрическая постоянная равна ε_0.

1. Внутренний шар заземляют, оставляя внешний слой незаземлённым. Каким будет отношение $\dfrac{q_{\text{внеш}}}{q_{\text{внутр}}}$ заряда внешней поверхности сферической оболочки к заряду внутренней поверхности, если внешнюю оболочку зарядить?
2. Возьмём две одинаковые системы из пункта 1 и расположим их очень далеко друг от друга (расстояние между шарами на рисунке преуменьшено). В одной из систем внешний слой заземлён, а внутренний шар соединён со внешним слоем другой системы. Какова ёмкость C подобной системы, если напряжение подаётся на внутренний шар второй системы?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на проводники и соединения конденсаторов. Заряды на проводниках расставляет одно правило: поле внутри металла равно нулю, поэтому каждый проводник — эквипотенциален, а заряд внутренней поверхности оболочки равен по модулю и противоположен по знаку заряду всего, что внутри неё (теорема Гаусса для сферы, проведённой в толще стенки). Систему «шар + оболочка» удобно видеть как два конденсатора: шар — внутренняя поверхность оболочки (ёмкость C_1) и внешняя поверхность оболочки — бесконечность, то есть земля (ёмкость C_2). Дальше — обычный счёт последовательных и параллельных соединений.

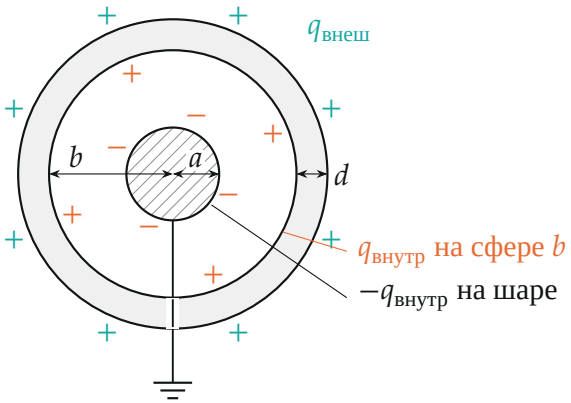
Обозначения. C_1 — ёмкость сферического конденсатора «шар радиуса a — сфера радиуса b»; C_2 — ёмкость уединённой сферы радиуса $b+d$; φ — потенциал (ноль — на бесконечности, он же потенциал земли).

1. Две ёмкости одной системы. Пусть на шаре заряд q, на внутренней поверхности оболочки $-q$. Поле между ними — поле точечного заряда q в центре (внешние сферические заряды поля внутри себя не создают), разность потенциалов шара и оболочки

$$\varphi_{\text{ш}} - \varphi_{\text{об}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{q}{\varphi_{\text{ш}} - \varphi_{\text{об}}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

Снаружи оболочки поле создаёт только суммарный заряд всего, что внутри сферы радиуса $b + d$. Заряды шара и внутренней поверхности в сумме дают ноль, поэтому снаружи работает только заряд внешней поверхности $q_{\text{внеш}}$, и потенциал оболочки

$$\varphi_{\text{об}} = \frac{q_{\text{внеш}}}{4\pi\varepsilon_0(b+d)} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0(b+d).$$



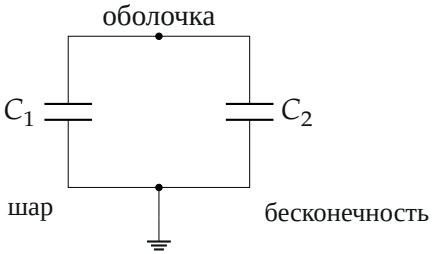
Пункт 1: оболочка (серый слой толщиной d) заряжена, шар заземлён проводом через узкое отверстие. Заряд внутренней поверхности оболочки $q_{внутр}$ и наведённый заряд шара $-q_{внутр}$ показаны морковным, заряд внешней поверхности — бирюзой.

Пункт 1. Отношение зарядов. Шар заземлён: $\varphi_{ш} = 0$. На внутренней поверхности оболочки заряд $q_{внутр}$, на шаре — $-q_{внутр}$ (поле в толще стенки равно нулю, значит поток через сферу внутри стенки нулевой и полный заряд внутри неё равен нулю). Тогда по шагу 1 одна и та же величина — потенциал оболочки — записывается двумя способами:

$$\varphi_{об} - 0 = \frac{q_{внутр}}{C_1}, \qquad \varphi_{об} = \frac{q_{внеш}}{C_2}.$$

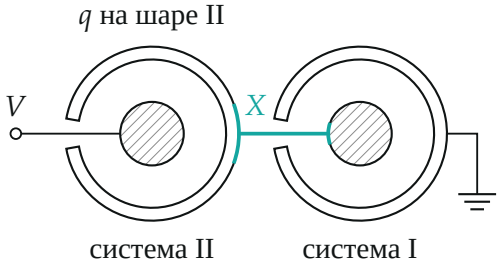
Обе ёмкости подключены между оболочкой и «землёй» (шар заземлён, бесконечность — тоже ноль потенциала), то есть соединены параллельно: напряжение одно, заряд делится пропорционально ёмкостям:

$$\frac{q_{внеш}}{q_{внутр}} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(b+d)(b-a)}{ab}.$$



Эквивалентная схема пункта 1: ёмкость «оболочка — шар» и ёмкость «оболочка — бесконечность» включены параллельно между оболочкой и землёй.

Пункт 2. Ёмкость двух систем. Назовём II систему, на шар которой подают напряжение, а I — систему с заземлённой оболочкой. Системы далеко, поэтому их поля друг на друга не влияют, и каждую можно описывать своими C_1 и C_2. Проводники здесь такие: шар II (потенциал V, заряд q); узел X — оболочка II, провод и шар I (потенциал φ_X, в сумме не заряжен); оболочка I и земля (потенциал 0).



Пункт 2: бирюзой выделен узел X — оболочка системы II, провод и шар системы I; это один проводник с общим потенциалом φ_X.

Ёмкость системы — это $C = q/V$: какой заряд уходит на шар II при напряжении V относительно земли. Связи между зарядами и потенциалами (шаг 1):

$$q = C_1\,(V - \varphi_X) \quad \text{(шар II — оболочка II)},$$

$$q_{\text{внеш}} = C_2\,\varphi_X \quad \text{(внешняя поверхность оболочки II — бесконечность)},$$

$$q_{\text{I}} = C_1\,\varphi_X \quad \text{(шар I — заземлённая оболочка I)}.$$

Закон сохранения заряда для узла X: на внутренней поверхности оболочки II заряд $-q$, и суммарный заряд узла равен нулю:

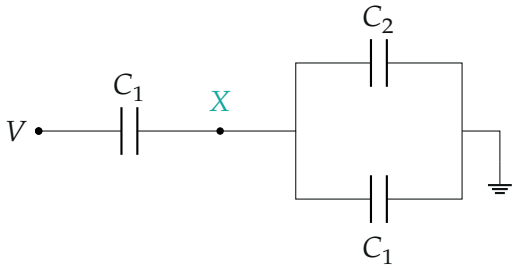
$$-q + q_{\text{внеш}} + q_{\text{I}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = (C_1 + C_2)\,\varphi_X.$$

Это и есть последовательное соединение: ёмкость C_1 (между V и X) и параллельные C_2 и C_1 (между X и землёй). Исключим φ_X:

$$V = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_1 + C_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_2}, \qquad C = \frac{C_1(C_1 + C_2)}{2C_1 + C_2}.$$

Подставим C_1 и C_2 и умножим числитель и знаменатель дроби на $(b - a)/(4\pi\varepsilon_0)$:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\,ab}{b - a} \cdot \frac{ab + (b + d)(b - a)}{2ab + (b + d)(b - a)}.$$



Эквивалентная схема пункта 2: C_1 системы II последовательно с параллельными C_2 (оболочка II — бесконечность) и C_1 (шар I — оболочка I).

Обратите внимание. Ёмкость C_2 — это ёмкость внешней поверхности оболочки, радиус в ней $b + d$, а не b: толщина стенки входит в ответ только через неё. Шар II окружён оболочкой II целиком, поэтому прямой ёмкости «шар II — земля» нет: весь заряд q шара II «видит» только оболочку II.

Проверка. Размерность: $\varepsilon_0 \cdot$(длина) — фарад, оба ответа пункта 1 и 2 так и устроены, отношение зарядов безразмерно. Пределы: при $d \to \infty$ ёмкость $C_2 \to \infty$, оболочка II фактически заземлена, и $C \to C_1$ — верно, второй множитель стремится к единице. При $b \to a$ (зазор исчезает) $C_1 \to \infty$, и $q_{\text{внеш}}/q_{\text{внутр}} \to 0$: почти весь заряд оболочки уходит на внутреннюю поверхность к близкому заземлённому шару. Численная проверка ($a = 1, b = 2, d = 1, 4\pi\varepsilon_0 = 1$): $C_1 = 2, C_2 = 3, C = 2{\cdot}5/7 = 10/7$; формула ответа даёт $\frac{2}{1} \cdot \frac{2+3}{4+3} = 10/7$.

Смысл: оболочка, на которую ничего не подано, делит напряжение как узел между последовательными конденсаторами, и ёмкость всей цепочки меньше ёмкости C_1 одной системы.

Ответ. 1) $\dfrac{q_{\text{внеш}}}{q_{\text{внутр}}} = \dfrac{(b+d)(b-a)}{ab}$; 2) $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \cdot \dfrac{ab + (b+d)(b-a)}{2ab + (b+d)(b-a)}$.