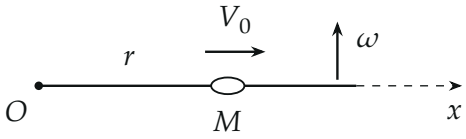
Муравей на вращающемся стержне

Задача 1. [Курчатов 2025/26, 11 класс, задача 1] Стержень равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня O. Угловая скорость вращения $\omega = 0{,}2$ рад/с. По стержню в направлении от оси вращения ползёт муравей M. Скорость муравья относительно стержня постоянна и равна $V_0 = 4$ см/с. В некоторый момент времени муравей находится на расстоянии $r = 30$ см от оси. Считая муравья материальной точкой, найдите следующие величины:

1. Абсолютную величину V скорости муравья относительно плоскости вращения и угол α, который вектор скорости образует с осью x, направленной вдоль стержня.
2. Абсолютную величину a ускорения муравья и угол β, который вектор ускорения образует с осью x.
3. Радиус кривизны R траектории муравья.



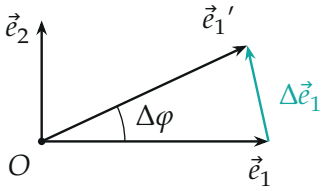
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику сложного движения: муравей ползёт по стержню и вместе со стержнем поворачивается. Главная идея — разложить скорость и ускорение по двум единичным векторам, привязанным к стержню, и аккуратно учесть, что сами эти векторы поворачиваются. Радиус кривизны найдём из нормального ускорения $a_n = V^2/R$.

Обозначения. $\vec{e}_1$ — единичный вектор вдоль стержня от O (вдоль оси x), $\vec{e}_2$ — единичный вектор поперёк стержня в сторону поворота (вдоль оси y); в данный момент $\vec{r} = r\vec{e}_1$. Углы α и β отсчитываем от оси x в сторону поворота стержня.

1. Как меняются $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. За малое время Δt стержень поворачивается на угол $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. Единичный вектор $\vec{e}_1$ поворачивается на тот же угол;

его приращение — хорда малой дуги радиуса 1, она перпендикулярна $\vec{e}_1$ и направлена в сторону поворота (рисунок 2):

$$\Delta\vec{e}_1 = \omega\Delta t\,\vec{e}_2, \qquad \Delta\vec{e}_2 = -\omega\Delta t\,\vec{e}_1.$$



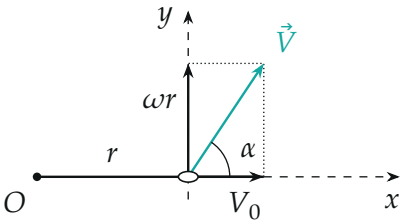
За время Δt вектор $\vec{e}_1$ повернулся на $\Delta\varphi = \omega\Delta t$; приращение $\Delta\vec{e}_1$ длиной $\Delta\varphi$ направлено вдоль $\vec{e}_2$.

Пункт 1. Скорость. Радиус-вектор муравья $\vec{r} = r\vec{e}_1$; за Δt длина r выросла на $V_0\Delta t$, а $\vec{e}_1$ повернулся:

$$\Delta\vec{r} = V_0\Delta t\,\vec{e}_1 + r\,\Delta\vec{e}_1 = V_0\Delta t\,\vec{e}_1 + \omega r\Delta t\,\vec{e}_2 \quad\Rightarrow\quad \vec{V} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = V_0\vec{e}_1 + \omega r\,\vec{e}_2.$$

Первое слагаемое — скорость относительно стержня, второе — скорость той точки стержня, где сейчас муравей. Проекции на оси: $V_x = V_0 = 4$ см/с, $V_y = \omega r = 0{,}2 \cdot 30 = 6$ см/с. Отсюда

$$V = \sqrt{V_0^2 + (\omega r)^2} = \sqrt{16 + 36} \approx 7{,}2 \text{ см/с}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega r}{V_0} = 1{,}5, \quad \alpha \approx 56°.$$



Скорость муравья — сумма скорости вдоль стержня V_0 и скорости точки стержня ωr поперёк него.

Пункт 2. Ускорение. Приращение скорости за Δt: V_0 постоянна, r выросла на $V_0\Delta t$, а оба единичных вектора повернулись:

$$\Delta\vec{V} = V_0\,\Delta\vec{e}_1 + \omega\,V_0\Delta t\,\vec{e}_2 + \omega r\,\Delta\vec{e}_2 = \omega V_0\Delta t\,\vec{e}_2 + \omega V_0\Delta t\,\vec{e}_2 - \omega^2 r\Delta t\,\vec{e}_1.$$

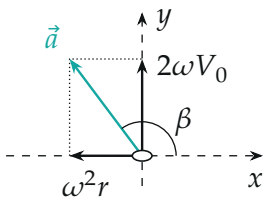
$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = -\omega^2 r\,\vec{e}_1 + 2\omega V_0\,\vec{e}_2.$$

Первое слагаемое — центростремительное ускорение точки стержня, второе — удвоенное слагаемое ωV_0: одну половину даёт поворот вектора относительной скорости, другую — рост скорости ωr точки стержня по мере удаления от оси (это ускорение Кориолиса). Проекции: $a_x = -\omega^2 r = -1{,}2$ см/с^2, $a_y = 2\omega V_0 = 1{,}6$ см/с^2;

$$a = \omega\sqrt{(\omega r)^2 + (2V_0)^2} = \sqrt{1{,}44 + 2{,}56} = 2\ \text{см/с}^2.$$

Проекция на x отрицательна, на y положительна, значит, угол тупой:

$$\beta = 180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{2V_0}{\omega r} = 180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 127^\circ.$$



Ускорение: к оси вращения $\omega^2 r$ и поперёк стержня $2\omega V_0$; угол β с осью x тупой.

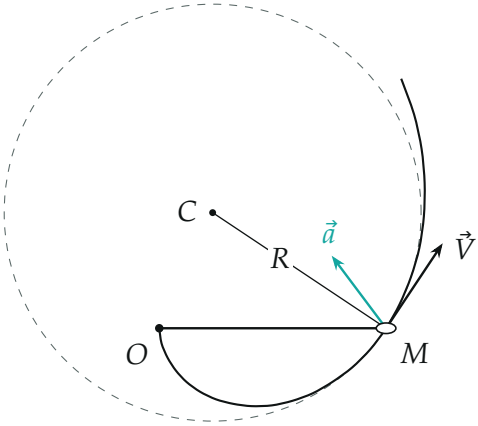
Пункт 3. Радиус кривизны. Разложим $\vec{a}$ на касательную к траектории составляющую (вдоль $\vec{V}$) и нормальную. Нормальное ускорение связано с радиусом кривизны: $a_n = V^2/R$. Угол между $\vec{a}$ и $\vec{V}$ равен $\beta - \alpha$, поэтому

$$a_n = a\sin(\beta - \alpha), \qquad R = \frac{V^2}{a\sin(\beta - \alpha)}.$$

Удобнее через проекции: $a_n = \dfrac{|V_x a_y - V_y a_x|}{V} = \dfrac{4\cdot 1{,}6 + 6\cdot 1{,}2}{7{,}21} \approx$ 1,89 см/с^2, и

$$R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^3}{V_x a_y - V_y a_x} = \frac{52^{3/2}}{13{,}6} \approx 27{,}6 \text{ см}.$$

Касательное ускорение $a_\tau = \dfrac{V_x a_x + V_y a_y}{V} \approx 0{,}67$ см/с$^2 > 0$: муравей разгоняется — чем дальше от оси, тем быстрее движется точка стержня.



Траектория муравья (спираль Архимеда $r = \frac{V_0}{\omega}\varphi$, построена по точкам) и соприкасающаяся окружность радиуса R с центром C; ускорение отклонено от нормали MC вперёд — есть касательная составляющая.

Обратите внимание. Ускорение поперёк стержня — $2\omega V_0$, а не ωV_0: поворот вектора $\vec{e}_1$ в слагаемом $V_0\vec{e}_1$ даёт одну половину, рост длины r в слагаемом $\omega r\vec{e}_2$ — вторую. Только центростремительное ускорение $\omega^2 r$ даёт неверный ответ $a = 1{,}2$ см/с^2.

Проверка. Размерности: ωr и V_0 — см/с; ωV_0 и $\omega^2 r$ — см/с^2; V^2/a — см. Предел $V_0 \to 0$: муравей сидит, $\vec{a} = -\omega^2 r\vec{e}_1$, $\beta = 180°$, $\vec{V} \perp \vec{a}$ и $R = \dfrac{(\omega r)^2}{\omega^2 r} = r$ — обычное движение по окружности. Второй способ для R: $\sin(\beta - \alpha) = \sin 70{,}56° \approx 0{,}943$, $R = \dfrac{52}{2\cdot 0{,}943} \approx 27{,}6$ см. Радиус

кривизны меньше r: спираль закручена круче окружности, на которой сейчас муравей.

Ответ. 1) $V = \sqrt{V_0^2 + (\omega r)^2} \approx 7{,}2$ см/с, $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{\omega r}{V_0} \approx 56°$; 2) $a = \omega\sqrt{(2V_0)^2 + (\omega r)^2} = 2$ см/с^2, $\beta = 180° - \operatorname{arctg} \dfrac{2V_0}{\omega r} \approx 127°$; 3) $R = \dfrac{V^2}{a \sin(\beta - \alpha)} \approx 27{,}6$ см.