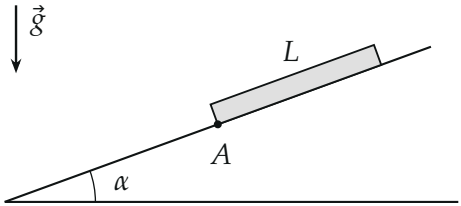
Доска на гладкой и шероховатой плоскостях

Задача 2. [Курчатов 2025/26, 11 класс, задача 2] Наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол $\alpha = \arcsin(0{,}2)$, состоит из двух полуплоскостей, соприкасающихся по прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка (в дальнейшем прямая A). Верхняя полуплоскость гладкая, нижняя шероховатая. На верхней полуплоскости удерживают однородную прямоугольную доску длиной $L = 1$ м так, что её нижний край лежит на прямой A. Затем доску отпускают без толчка, она начинает двигаться и через некоторое время останавливается, переместившись вдоль плоскости на расстояние L. Найдите время движения доски τ. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



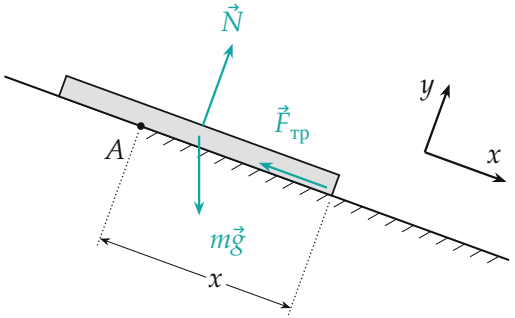
▲ **Решение. Что происходит.** Сначала вся доска на гладкой части, её разгоняет скатывающая сила $mg\sin\alpha$. По мере заезда на шероховатую часть растёт доля доски, прижатая к шероховатой поверхности, — сила трения растёт пропорционально пройденному пути, как сила упругости пружины. Получается гармоническое колебание вокруг положения, где трение уравновешивает скатывающую силу; доска останавливается в крайней точке через полпериода. Неизвестный коэффициент трения найдём из того, что крайняя точка — ровно на расстоянии L.

Обозначения. m — масса доски, μ — коэффициент трения о шероховатую часть (не дан, найдём), x — смещение доски вдоль плоскости вниз от начального положения ($0 \le x \le L$), ось x вниз вдоль склона, ось y перпендикулярно склону. $\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}04} \approx 0{,}98$.

1. Сила трения при смещении x. Доска однородна и давит на плоскость равномерно по длине. На шероховатой части лежит кусок длиной x с массой mx/L. Второй закон Ньютона в проекции на ось y (поперёк

склона доска не движется) для этого куска даёт силу нормальной реакции шероховатой части $N_x = (x/L)\,mg\cos\alpha$; доска скользит вниз, поэтому трение скольжения направлено вверх по склону:

$$F_{\text{тр}} = \mu N_x = \frac{\mu mg\cos\alpha}{L}\,x.$$



Доска сместилась на x: на шероховатой части (штриховка снизу) лежит её кусок длиной x, только он даёт трение. Сила $\vec{N}$ — суммарная реакция плоскости, приложена к середине доски.

2. Уравнение движения. Второй закон Ньютона для доски в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \frac{\mu mg\cos\alpha}{L}\,x \quad\Rightarrow\quad \ddot{x} = -\omega^2(x - x_0),$$

$$\omega^2 = \frac{\mu g\cos\alpha}{L}, \quad x_0 = \frac{L\,\text{tg}\,\alpha}{\mu}.$$

Это уравнение гармонических колебаний около положения x_0, где трение равно скатывающей силе. Уравнение верно, пока доска едет вниз (трение направлено вверх) и пока $x \le L$.

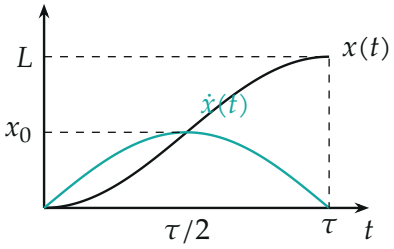
3. Закон движения. Начальные условия: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ — доска отпущена без толчка, это крайнее положение колебания. Значит, амплитуда равна x_0:

$$x(t) = x_0\,(1 - \cos\omega t)\,, \qquad \dot{x}(t) = x_0\,\omega\sin\omega t.$$

Скорость впервые обращается в нуль через полпериода, при $\omega\tau = \pi$, в другом крайнем положении $x = 2x_0$. Доска останавливается там, где $x = L$:

$$2x_0 = L \quad \Rightarrow \quad \mu = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx 0{,}41, \qquad \omega^2 = \frac{2g\sin\alpha}{L} = \frac{2\cdot 10\cdot 0{,}2}{1} = 4\ \mathrm{с}^{-2}.$$

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{L}{2g\sin\alpha}} = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{с} \approx 1{,}6\ \mathrm{с}.$$

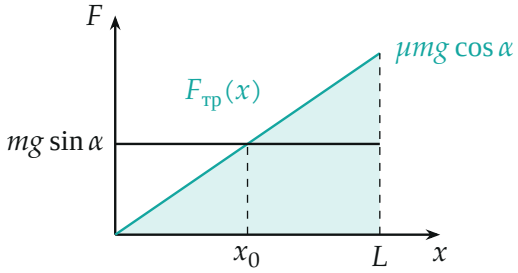


Смещение (чёрное) и скорость (бирюзовая, в своём масштабе) — половина периода гармонического колебания; в середине пути скорость наибольшая.

4. Второй способ для μ: энергия. Начало и конец — покой, поэтому работа силы тяжести на пути L равна работе против трения. Сила трения растёт от 0 до $\mu mg\cos\alpha$ линейно по x, её работа — площадь треугольника под графиком (рисунок 5):

$$mgL\sin\alpha = \frac{1}{2}\,\mu mg\cos\alpha\cdot L \quad \Rightarrow \quad \mu = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Совпало с пунктом 3.



Скатывающая сила постоянна, трение растёт линейно. Работы равны, когда площадь прямоугольника под $mg\sin\alpha$ равна площади треугольника под $F_{тр}$, то есть при $\mu mg\cos\alpha = 2mg\sin\alpha$.

Обратите внимание. Сила трения здесь не постоянна: давит на шероховатую часть только кусок доски длиной x. Взять трение $\mu mg\cos\alpha$ сразу целиком — значит получить равнозамедленное движение и неверное время.

Проверка. Размерность: $\sqrt{L/g}$ — секунды. После остановки доска остаётся на месте: трение покоя может достигать $\mu mg\cos\alpha = 2mg\sin\alpha$, а скатывающая сила вдвое меньше. Смысл: чем круче склон, тем сильнее «пружина» трения (μ растёт вместе с $\operatorname{tg}\alpha$), и тем быстрее проходит полпериода.

Ответ. $\tau = \pi\sqrt{\dfrac{L}{2g\sin\alpha}} = \dfrac{\pi}{2}$ с $\approx 1{,}6$ с (при этом $\mu = 2\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}41$).