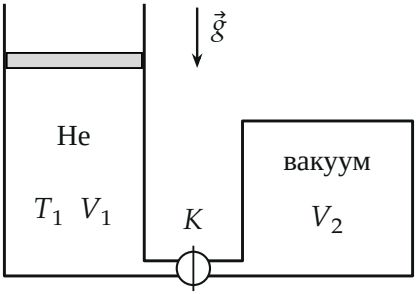
Гелий под поршнем и вакуумный сосуд

Задача 3. [Курчатов 2025/26, 11 класс, задача 3] В вертикальном цилиндре, открытом сверху в атмосферу, может свободно двигаться массивный поршень. Цилиндр соединён с сосудом постоянного объёма короткой трубкой с краном K. Сначала кран закрыт, сосуд откачан до глубокого вакуума, в цилиндре под поршнем находится гелий при температуре $T_1 = 300$ К. Известно отношение k объёма сосуда V_2 к объёму гелия V_1: $k = V_2/V_1 = 0{,}5$. Кран открывают, гелий перетекает в правый сосуд, и вся система переходит в новое состояние равновесия. Считая, что все стенки, поршень и трубка с краном не проводят тепло, найдите конечную температуру гелия T_2 и отношение x/h_1, где x — расстояние, на которое переместился поршень, h_1 — высота поршня над дном цилиндра в начальном состоянии. Объём трубки с краном не учитывайте, атмосферное давление считайте постоянным.



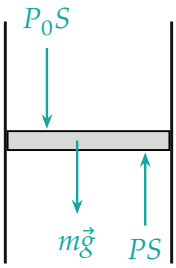
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для необратимого процесса. После открытия крана газ рывком уходит в пустой сосуд, поршень опускается, колеблется и успокаивается — промежуточные состояния неравновесны, и формулы для квазистатического процесса применять нельзя. Но начало и конец — равновесные, и в обоих давление газа одно и то же: его задаёт поршень. Теплообмена нет, поэтому изменение внутренней энергии газа равно работе, которую совершили над ним атмосфера и сила тяжести поршня; эта работа считается просто, потому что обе силы постоянны.

Обозначения. P_0 — атмосферное давление, m и S — масса и площадь поршня, P — давление гелия в начальном и конечном равновесии, ν — количество гелия, $C_V = \frac{3}{2}R$ — его молярная теплоёмкость при постоянном объёме (газ одноатомный). Поршень опускается на x.

1. Давление в начале и в конце. Условие равновесия поршня (второй закон Ньютона при нулевом ускорении) в проекции на вертикаль:

$$PS = P_0 S + mg.$$

Оно одинаково в начале и в конце, значит, давление газа в конечном состоянии такое же, как в начальном.



Силы на поршень: атмосфера давит сверху (P_0S), газ снизу (PS), сила тяжести $m\vec{g}$.

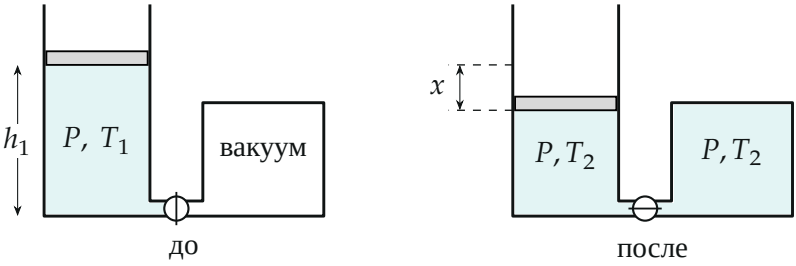
2. Работа внешних сил над газом. Рассмотрим систему «гелий + поршень». Атмосфера давит на поршень постоянной силой P_0S, сила тяжести mg тоже постоянна; поршень опустился на x, и обе силы совершили положительную работу

$$A_{\text{внеш}} = (P_0 S + mg)\, x = PSx.$$

Кинетической энергии в начале и в конце нет (поршень покоится; его колебания затухли, и энергия ушла во внутреннюю энергию газа — наружу ей деться некуда). Теплообмена нет. Закон сохранения энергии для системы «гелий + поршень» от начального до конечного равновесия:

$$\nu C_V (T_2 - T_1) + mg(-x) = P_0 S x \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\nu R (T_2 - T_1) = PSx.$$

(Потенциальная энергия поршня уменьшилась на mgx, поэтому слагаемое mgx перешло в правую часть.)



До открытия крана и после: поршень опустился на x, гелий (бирюзовый) занял цилиндр и сосуд; давление в конце то же, P.

3. Уравнение состояния. Уравнение Менделеева — Клапейрона для гелия в начале и в конце (объём в конце — цилиндр высотой $h_1 - x$ плюс сосуд):

$$PV_1 = \nu RT_1, \qquad P\,(V_1 + kV_1 - Sx) = \nu RT_2.$$

Вычтем первое из второго: $PSx = \nu R\left[(1+k)T_1 - T_2\right]$. Работа внешних сил выражена через температуры.

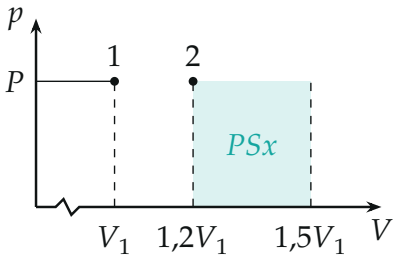
4. Температура. Подставим PSx в закон сохранения энергии:

$$\tfrac{3}{2}(T_2 - T_1) = (1+k)T_1 - T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1\,\frac{5+2k}{5} = 300 \cdot \frac{6}{5} = 360\ \text{K}.$$

Газ нагрелся: внешние силы совершили над ним работу, а уйти тепло не могло.

5. Смещение поршня. Начальный объём $V_1 = Sh_1$, поэтому $PSx = PV_1\dfrac{x}{h_1} = \nu RT_1\dfrac{x}{h_1}$. Из пункта 3:

$$\frac{x}{h_1} = \frac{(1+k)T_1 - T_2}{T_1} = 1 + k - \frac{5+2k}{5} = \frac{3k}{5} = 0{,}3.$$



Начальное (1) и конечное (2) равновесные состояния на одной изобаре; промежуточные неравновесны, линии процесса нет. Работа внешних сил PSx — полоска от $1{,}2V_1$ до $(1+k)V_1 = 1{,}5V_1$: на столько уменьшился объём, если бы газ сначала занял оба сосуда.

Обратите внимание. Расширение в пустой сосуд само работы не требует, но поршень при этом опускается, и атмосфера с силой тяжести совершают над газом работу. Поэтому температура не сохраняется, как при свободном расширении, а растёт.

Проверка. Размерность: x/h_1 и T_2/T_1 безразмерны. Предел $k \to 0$ (сосуда нет): $T_2 = T_1$, $x = 0$ — ничего не происходит. Второй способ: из $T_2/T_1 = 1{,}2$ и уравнения состояния конечный объём $V_1T_2/T_1 = 1{,}2V_1$, а он же равен $1{,}5V_1 - Sx$; значит, $Sx = 0{,}3V_1$, $x/h_1 = 0{,}3$. Поршень опустился меньше, чем на kV_1/S: газ нагрелся и занял больше места, чем при той же температуре.

Ответ. $T_2 = T_1\dfrac{5+2k}{5} = 360$ К; $\dfrac{x}{h_1} = \dfrac{3k}{5} = 0{,}3$.