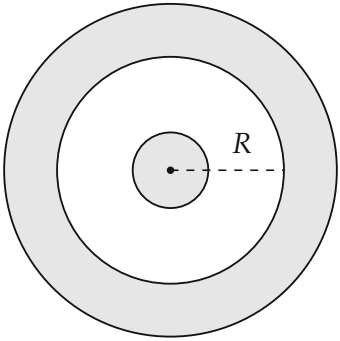
Электрическое давление на слой

Задача 4. [Курчатов 2025/26, 11 класс, задача 4] Металлический шар окружён концентрическим металлическим сферическим слоем, внутренний радиус которого $R = 6$ см. Слою сообщили заряд $q_1 = 20$ нКл. Найдите заряд q_2, который нужно сообщить шару для того, чтобы электрическое давление на внешнюю поверхность слоя обратилось в нуль. Каково в этом случае электрическое давление P на внутреннюю поверхность слоя? Выразите давление в миллипаскалях и округлите до целого значения. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на проводники в электростатике и давление поля на заряженную поверхность. Внутри металла поля нет, поэтому заряды раскладываются по поверхностям так, что внутренняя поверхность слоя несёт заряд, противоположный заряду шара. Давление поля на поверхность найдём энергетически: мысленно сдвинем поверхность и сравним работу сил давления с изменением энергии поля. Давление на внешнюю поверхность создаёт поле снаружи, и оно исчезает, только если снаружи поля нет вовсе.

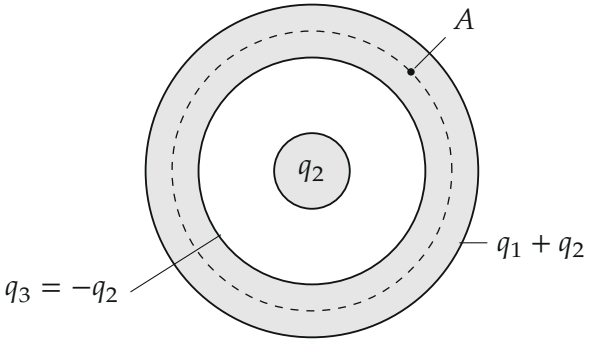
Обозначения. q_3 — заряд внутренней поверхности слоя, ρ — радиус его внешней поверхности, $w = \varepsilon_0 E^2/2$ — плотность энергии поля, P_r — давление на поверхность, положительное, если поле тянет поверхность наружу (по радиусу).

1. Распределение зарядов. Возьмём точку A внутри металла слоя на расстоянии r от центра. По теореме Гаусса для сферы радиуса r поле в

A создают только заряды внутри неё — шар и внутренняя поверхность слоя; в металле поле равно нулю:

$$E_A = \frac{q_2 + q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 = -q_2.$$

Весь заряд слоя q_1 сохраняется, поэтому на внешней поверхности остаётся $q_1 - q_3 = q_1 + q_2$.



Заряды на поверхностях. Сфера Гаусса (пунктир) проходит через точку A в металле слоя; поле там равно нулю, поэтому внутри сферы суммарный заряд нуль.

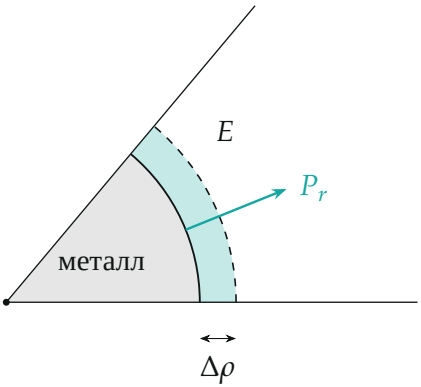
2. Давление поля на поверхность. Пусть снаружи у поверхности поле E, а с другой стороны (в металле) поля нет. Мысленно сдвинем всю сферическую поверхность радиуса ρ наружу на малое $\Delta\rho$, не меняя заряда. Объём $\Delta V = 4\pi\rho^2\Delta\rho$, где было поле, становится металлом, и энергия поля в нём исчезает; поле во всём остальном пространстве не меняется (оно определяется только зарядами внутри). Закон сохранения энергии: работа сил давления поля на поверхность равна убыли энергии поля,

$$P_r\,\Delta V = w\,\Delta V \quad \Rightarrow \quad P_r = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Знак плюс: поле тянет поверхность в сторону, где поле есть (наружу).

Для внешней поверхности слоя $E = \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}$:

$$P_r = \frac{(q_1 + q_2)^2}{32\pi^2\varepsilon_0\rho^4}.$$



Внешняя поверхность сдвинута наружу на $\Delta\rho$: в бирюзовом слое поле E пропало (там теперь металл), энергия $w\Delta V$ ушла на работу сил давления.

3. Заряд шара. Давление на внешнюю поверхность обращается в нуль, когда снаружи нет поля:

$$q_1 + q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = -q_1 = -20 \text{ нКл}.$$

Тогда весь заряд слоя q_1 собирается на внутренней поверхности, а снаружи слой не заряжен.

4. Давление на внутреннюю поверхность. Теперь поле есть между шаром и слоем, а в металле слоя его нет. У внутренней поверхности (радиус R) поле создаёт шар:

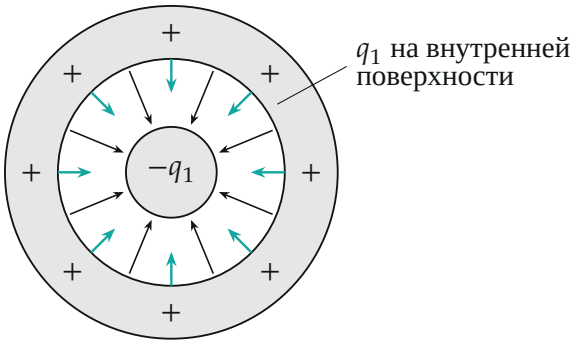
$$E = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Сдвинем поверхность внутрь на ΔR — в объёме $4\pi R^2\Delta R$ поле пропадает; значит, поле тянет поверхность внутрь, к шару (заряды шара и

внутренней поверхности слоя разного знака и притягиваются). Модуль давления, как в пункте 2:

$$P = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$

$$P = \frac{(2\cdot 10^{-8})^2}{32\pi^2 \cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot (0{,}06)^4} \approx 1{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{Па} = 11\ \text{мПа}.$$



При $q_2 = -q_1$ поле только между шаром и слоем (чёрные линии); снаружи поля нет. Бирюзовые стрелки — силы давления поля на внутреннюю поверхность, они направлены к шару.

Второй способ (через поверхностную плотность). Давление поля на заряженную поверхность проводника $P = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$, где $\sigma = \dfrac{q_1}{4\pi R^2}$ — то же самое: $\dfrac{q_1^2}{16\pi^2 R^4 \cdot 2\varepsilon_0}$. Получается та же формула, $P \approx 11$ мПа (расчёт на python совпал до четырёх знаков).

Обратите внимание. На поверхность действует не всё поле E у неё, а половина: заряд поверхности не действует сам на себя. Поэтому $P = \sigma E/2 = \varepsilon_0 E^2/2$, а не σE — иначе ответ вдвое больше, 22 мПа.

Проверка. Размерность: $\varepsilon_0 E^2$ — Ф/м·В^2/м^2 = Дж/м^3 = Па. Знак: разноимённые заряды шара и внутренней поверхности притягиваются — поверхность тянет внутрь, как и получилось. Давление мало (сотые до-

ли паскаля) — электрические силы при зарядах в десятки нанокулон слабы.

Ответ. $q_2 = -q_1 = -20$ нКл; $P = \dfrac{q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} \approx 11$ мПа (поле тянет внутреннюю поверхность к шару).