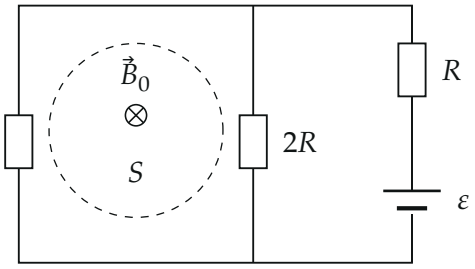
ЭДС индукции в двухконтурной цепи

Задача 5. [Курчатов 2025/26, 11 класс, задача 5] Электрическая цепь состоит из двух плоских контуров, включающих в себя сопротивление $R = 27$ Ом, два сопротивления $2R$ и батарею с ЭДС $\varepsilon = 1{,}5$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Левый контур охватывает цилиндрическую область площадью поперечного сечения $S = 300$ см^2. В этой области имеется однородное магнитное поле, индукция которого зависит от времени по закону $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \omega t$, где $\vec{B}_0$ — постоянный вектор, равный по абсолютной величине 0,2 Тл и направленный перпендикулярно плоскости контура, $\omega = 500$ рад/с. Найдите среднюю за период $T = 2\pi/\omega$ тепловую мощность P, выделяющуюся на сопротивлении R. Ответ выразите в милливаттах и округлите до целого значения.



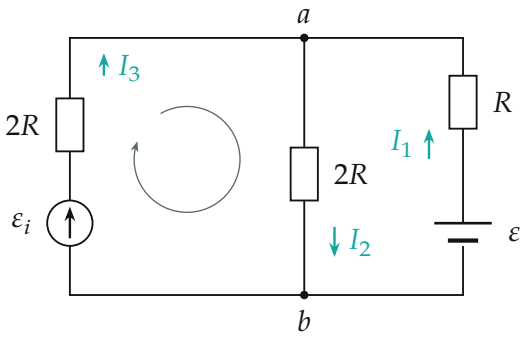
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон электромагнитной индукции и правила Кирхгофа. Переменное магнитное поле внутри левого контура создаёт в нём ЭДС индукции — это ещё один источник в левой ветви. Цепь линейна, поэтому ток через R — сумма тока от батареи (постоянного) и тока от ЭДС индукции (синусоидального). При усреднении мощности перекрёстное слагаемое даёт нуль, и мощности двух источников просто складываются.

Обозначения. Левая ветвь — резистор $2R$ (на рисунке без подписи: два сопротивления $2R$ — левое и среднее), средняя — $2R$, правая — R и батарея плюсом вверх (длинная пластина). Токи: I_1 — через R вверх, I_2 — через средний $2R$ вниз, I_3 — через левый $2R$ вверх.

1. ЭДС индукции. Магнитный поток через левый контур $\Phi = B_0 S \cos \omega t$ (поле только внутри цилиндра площадью S). Закон электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 S\omega \sin \omega t, \qquad B_0 S\omega = 0{,}2 \cdot 0{,}03 \cdot 500 = 3 \text{ В}.$$

Направление: при $\sin \omega t > 0$ поток «от нас» убывает, и по правилу Ленца индукционный ток его поддерживает — ЭДС действует по часовой стрелке: в левой ветви вверх, в средней вниз. ЭДС индукции распределена по контуру, но для токов важна только её сумма по обходу левого контура, поэтому на эквивалентной схеме её можно поставить источником в левую ветвь.



Эквивалентная схема: ЭДС индукции — источник в левой ветви (стрелка — её направление при $\sin \omega t > 0$). Бирюзовые стрелки — выбранные положительные направления токов; серая дуга — обход левого контура по часовой стрелке.

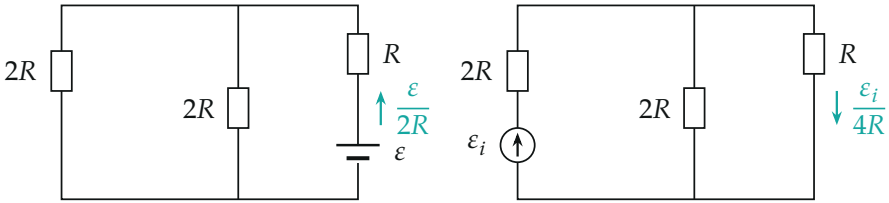
2. Правила Кирхгофа. Первое правило для узла a (втекают I_1 и I_3, вытекает I_2) и второе правило для правого и левого контуров (обход правого — против часовой стрелки, левого — по часовой):

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_2, \\ I_1 R + 2RI_2 = \varepsilon, \\ 2RI_3 + 2RI_2 = \varepsilon_i. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений $I_2 = \dfrac{\varepsilon - I_1 R}{2R}$, $I_3 = \dfrac{\varepsilon_i}{2R} - I_2$; подставим в первое: $I_1 + \dfrac{\varepsilon_i}{2R} = 2I_2 = \dfrac{\varepsilon - I_1 R}{R}$, откуда

$$I_1 = \frac{2\varepsilon - \varepsilon_i}{4R}.$$

3. Второй способ: наложение токов. Цепь линейна, поэтому ток через R — сумма токов от каждого источника по отдельности (второй источник заменён проводом).



Слева — только батарея, справа — только ЭДС индукции. Через R токи текут навстречу друг другу.

Только батарея: R последовательно с двумя $2R$, включёнными параллельно (это R); ток через R вверх равен $\dfrac{\varepsilon}{R+R} = \dfrac{\varepsilon}{2R}$. Только ЭДС индукции: левый $2R$ последовательно с параллельными $2R$ и R (это $\frac{2}{3}R$), ток источника $\dfrac{\varepsilon_i}{2R + \frac{2}{3}R} = \dfrac{3\varepsilon_i}{8R}$; он делится обратно сопротивлениям, через R идёт $\frac{2}{3}$ его, $\dfrac{\varepsilon_i}{4R}$, вниз. Итого $I_1 = \dfrac{\varepsilon}{2R} - \dfrac{\varepsilon_i}{4R}$ — совпало с пунктом 2.

4. Средняя мощность. Мгновенная мощность на R (закон Джоуля — Ленца):

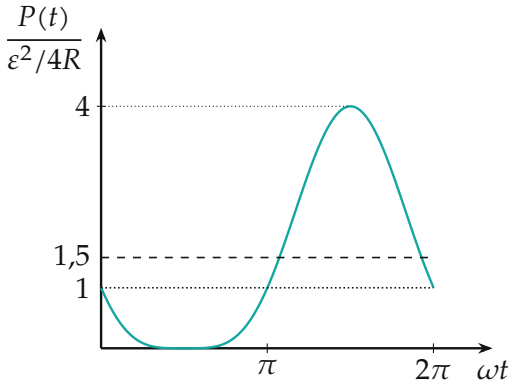
$$P(t) = I_1^2 R = \frac{4\varepsilon^2 - 4\varepsilon\varepsilon_i + \varepsilon_i^2}{16R}.$$

Усредним по периоду: $\langle \sin \omega t \rangle = 0$, $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, поэтому $\langle \varepsilon_i \rangle = 0$, $\langle \varepsilon_i^2 \rangle = \frac{1}{2}(B_0 S\omega)^2$:

$$P = \frac{1}{16R}\left[4\varepsilon^2 + \frac{(B_0 S\omega)^2}{2}\right] = \frac{\varepsilon^2}{4R}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{B_0 S\omega}{2\varepsilon}\right)^2\right].$$

Числа: $\dfrac{B_0 S\omega}{2\varepsilon} = \dfrac{3}{3} = 1$, $\dfrac{\varepsilon^2}{4R} = \dfrac{2{,}25}{108} \approx 20{,}8$ мВт,

$$P = 20{,}8 \cdot 1{,}5 \approx 31 \text{ мВт}.$$



Мгновенная мощность на R в единицах $\varepsilon^2/4R$: $(1-\sin\omega t)^2$ (при $B_0 S\omega = 2\varepsilon$). Среднее 1,5 (пунктир) больше, чем от одной батареи (1, точки).

Обратите внимание. Нельзя усреднять сначала ток, а потом возводить в квадрат: $\langle I_1\rangle^2 R = \dfrac{\varepsilon^2}{4R} \approx 21$ мВт — это только мощность от батареи. Переменная часть тока добавляет свою мощность $\dfrac{\langle \varepsilon_i^2\rangle}{16R}$.

Проверка. Размерность: $B_0 S\omega$ — Тл·м^2/с = В, ε^2/R — Вт. Предел $B_0 \to 0$: $P = \dfrac{\varepsilon^2}{4R}$ — мощность на R в цепи «батарея + R + R». Смысл: средние мощности от постоянного и переменного источников складываются, потому что их токи «не чувствуют» друг друга в среднем.

Ответ. $P = \dfrac{\varepsilon^2}{4R}\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{B_0 S\omega}{2\varepsilon}\right)^2\right] \approx 31$ мВт.