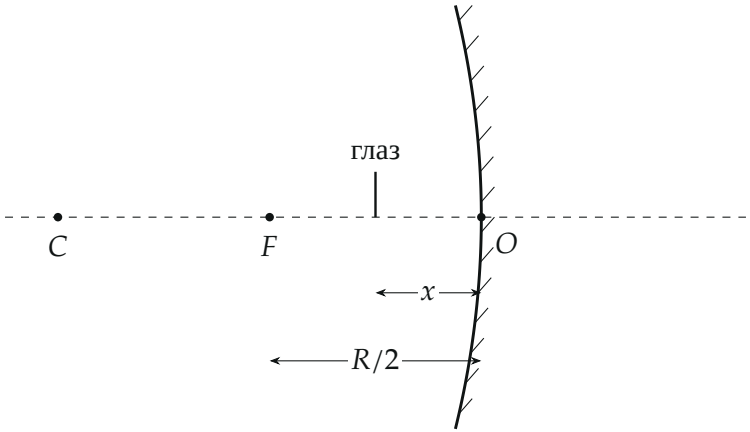
Глаз в сферическом зеркале

Задача 6. [Курчатов 2025/26, 11 класс, задача 6] Человек рассматривает изображение своего глаза сначала в плоском зеркале, а затем в вогнутом сферическом зеркале. Во втором случае он видит прямое изображение, увеличенное в $n = 2$ раза по сравнению с отражением в плоском зеркале. Считая, что в обоих случаях глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения $d = 24$ см, найдите радиус кривизны сферического зеркала R.

Аккомодация — способность глаза изменять оптическую силу при изменении положения предмета. Расстояние наилучшего зрения — оптимальное расстояние от предмета до глаза, при котором удобнее всего рассматривать детали предмета.

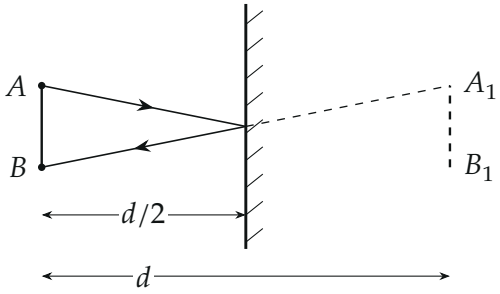
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение изображения в зеркалах. Глаз смотрит на изображение, а не на зеркало; раз глаз аккомодирован на d, изображение в обоих случаях находится на расстоянии d от глаза. Значит, изображения видны под углами, которые относятся как их размеры: «увеличенное в n раз» означает, что изображение в вогнутом зеркале в n раз выше самого глаза. Прямое увеличенное изображение вогнутое зеркало даёт, только если предмет между зеркалом и фокусом; изображение мнимое, за зеркалом. Дальше — подобие треугольников и формула зеркала.

Обозначения. AB — глаз высотой h (B на главной оптической оси зеркала), O — полюс (вершина) зеркала, F — фокус, C — центр кривизны, $OF = R/2$. x — расстояние от глаза до зеркала, y — от зеркала до изображения, H — высота изображения.



Поясняющий рисунок: глаз перед вогнутым зеркалом ближе фокуса (масштаб — по найденному ответу: $x = 8$ см, $OF = 16$ см).

1. Плоское зеркало. Изображение A_1B_1 мнимое, симметрично глазу относительно зеркала и равно ему: высота h. Глаз аккомодирован на d, значит, расстояние от глаза до изображения равно d, а до зеркала $d/2$. Изображение видно под углом $\varphi_1 \approx h/d$.



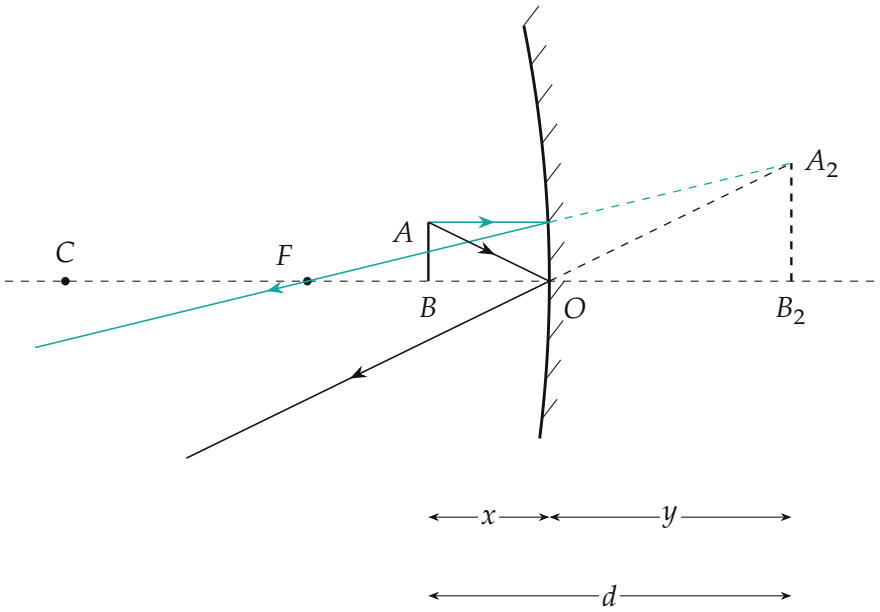
Плоское зеркало: изображение A_1B_1 равно глазу и находится на расстоянии d от него. Луч от точки A попадает в точку B (зрачок) так, будто идёт из A_1.

2. Вогнутое зеркало: где изображение. Изображение A_2B_2 тоже на расстоянии d от глаза, но в n раз выше: под углом $\varphi_2 = n\varphi_1$ видно $H/d = nh/d$, то есть $H = nh$. Изображение мнимое, за зеркалом, поэтому

$$x + y = d.$$

Луч от точки A, попавший в полюс O, отражается симметрично относительно оси, и его продолжение за зеркало проходит через изображение A_2. Поэтому треугольники AOB и A_2OB_2 подобны (углы при O равны, оба прямоугольные):

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{h} = n \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{n+1} = 8\text{ см}, \qquad y = \frac{nd}{n+1} = 16\text{ см}.$$



Построение в вогнутом зеркале (лучи посчитаны для $R = 32$ см). Бирюзовый луч параллелен оси и после отражения идёт через F; чёрный падает в полюс O и отражается симметрично. Продолжения (пунктир) сходятся в A_2.

3. Формула зеркала. Для вогнутого зеркала с фокусным расстоянием $R/2$, предмета на расстоянии x и мнимого изображения на расстоянии y за зеркалом (мнимое — со знаком минус):

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{R}.$$

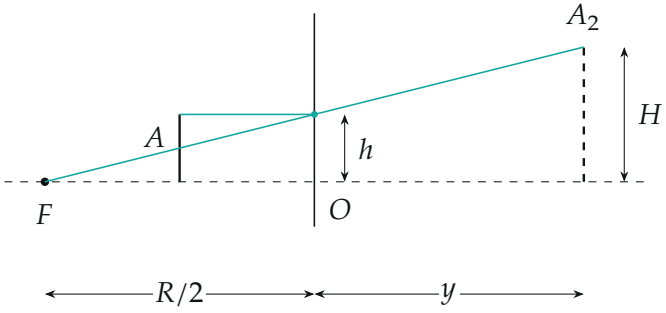
Подставим x и y:

$$\frac{2}{R} = \frac{n+1}{d} - \frac{n+1}{nd} = \frac{(n+1)(n-1)}{nd},$$

$$R = \frac{2nd}{n^2-1} = \frac{2\cdot 2\cdot 24}{3} = 32 \text{ см}.$$

4. Второй способ: подобие с фокусом. Бирюзовый луч на рисунке 3: после отражения он идёт через F, его продолжение — через A_2. Треугольник с вершиной F и катетами OF и h подобен треугольнику с вершиной F и катетами $OF + y$ и H:

$$\frac{H}{h} = \frac{R/2 + y}{R/2} = n \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{2} = \frac{y}{n-1} = \frac{16}{1} = 16 \text{ см}, \quad R = 32 \text{ см}.$$



Второй способ: прямая через F и точку отражения на высоте h продолжается до A_2 на высоте H; подобие даёт $H/h = (R/2 + y)/(R/2)$.

Обратите внимание. «Увеличенное в n раз по сравнению с плоским зеркалом» — это сравнение изображений, видимых с одного и того же расстояния d. Поэтому отношение размеров равно отношению углов зрения, и $H/h = n$ — обычное линейное увеличение зеркала. Если бы изображения были на разных расстояниях, пришлось бы сравнивать углы.

Проверка. Размерность: R — см. Глаз ближе фокуса: $x = 8$ см $< R/2 = 16$ см — изображение действительно прямое, мнимое и увеличенное, как в условии. Предел $n \to 1$: $R \to \infty$ — вогнутое зеркало

вырождается в плоское. Смысл: чем сильнее увеличение, тем меньше радиус — тем «сильнее» зеркало.

Ответ. $R = \dfrac{2nd}{n^2 - 1} = 32$ см.