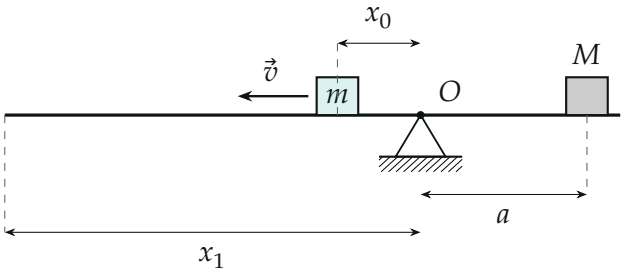
Тающий лёд на рычаге

Задача 1. [Курчатов 2025/26, 7 класс, задача 1] Невесомый жёсткий рычаг закреплён на оси в точке O и находится в равновесии в горизонтальном положении. На правом плече на расстоянии $a = 20$ см от оси закреплён груз массой $M = 0{,}50$ кг. На левом плече лежит кубик льда массы m, который в момент $t = 0$ находится на расстоянии $x_0 = 10$ см от оси. Кубик слегка подтолкнули вдоль рычага от оси, и он начал движение со скоростью $v = 0{,}02$ см/с. В процессе движения кубика лёд тает так, что рычаг всё время остаётся в равновесии. Край левого плеча находится на расстоянии $x_1 = 50$ см от оси. Найдите среднюю скорость таяния льда за время, за которое кубик достигнет края рычага. Под средней скоростью таяния льда понимается отношение массы растаявшего льда за всё время движения к этому времени движения. Трением между кубиком и рычагом можно пренебречь. Ответ выразите в г/с.



Поясняющий рисунок: рычаг на оси O, справа груз M, слева кубик льда уезжает от оси со скоростью $\vec{v}$ (масштаб расстояний соблюдён).

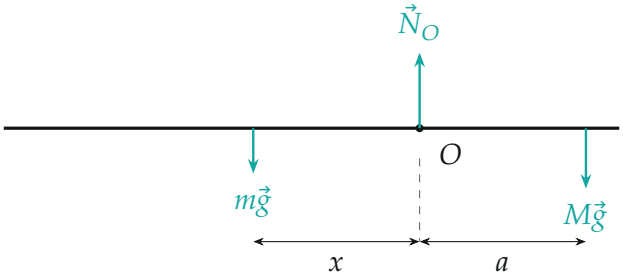
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на правило моментов. Кубик уезжает от оси, его плечо растёт, и чтобы рычаг остался в равновесии, момент силы тяжести кубика должен оставаться прежним — значит, масса кубика уменьшается обратно пропорционально расстоянию. Средняя скорость таяния — это просто «растаявшая масса делить на время»; ни закон таяния в каждый момент, ни производные не нужны.

Обозначения. x — расстояние кубика от оси в произвольный момент, m — его масса в этот момент; m_0, m_1 — массы в начале и у края; t_1 — время движения; $\langle\mu\rangle$ — средняя скорость таяния.

1. Правило моментов для рычага относительно оси O. Рычаг невесомый и покоится, поэтому сумма моментов сил относительно O равна нулю. Ось выбираем в O: сила реакции оси приложена там, её момент нулевой, и она не понадобится. Кубик и груз давят на рычаг с силами mg и Mg (вертикально, рычаг горизонтален):

$$mg\,x = Mg\,a \quad \Rightarrow \quad m\,x = Ma.$$

Это верно в любой момент движения, потому что рычаг всё время в равновесии.



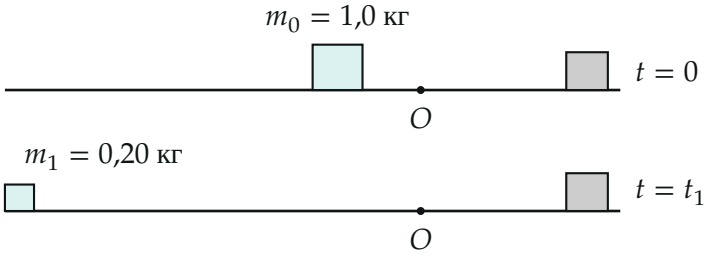
Силы на рычаг в произвольный момент: давление кубика $m\vec{g}$ на плече x, давление груза $M\vec{g}$ на плече a, реакция оси $\vec{N}_O$ (её момент относительно O равен нулю).

2. Движение кубика. Вдоль рычага на кубик не действует ни одна сила: трения нет, а сила тяжести и реакция рычага вертикальны. Поэтому кубик едет равномерно, $x = x_0 + vt$. Таяние скорость не меняет: тающая вода уходит с той же скоростью, что и кубик. Время до края:

$$t_1 = \frac{x_1 - x_0}{v} = \frac{50 - 10}{0{,}02} = 2000 \text{ с}.$$

3. Масса в начале и в конце. Из правила моментов:

$$m_0 = \frac{Ma}{x_0} = \frac{0{,}50 \cdot 20}{10} = 1{,}0 \text{ кг}, \qquad m_1 = \frac{Ma}{x_1} = \frac{0{,}50 \cdot 20}{50} = 0{,}20 \text{ кг}.$$



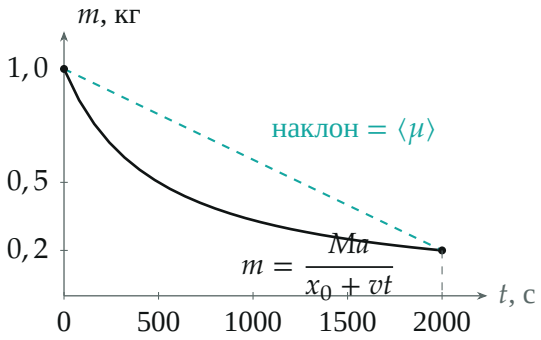
Было и стало: плечо выросло в $x_1/x_0 = 5$ раз, масса кубика уменьшилась в 5 раз.

4. Средняя скорость таяния. По определению из условия:

$$\langle\mu\rangle = \frac{m_0 - m_1}{t_1} = \frac{\dfrac{Ma}{x_0} - \dfrac{Ma}{x_1}}{\dfrac{x_1 - x_0}{v}} = \frac{Ma\,(x_1 - x_0)}{x_0 x_1} \cdot \frac{v}{x_1 - x_0} = \frac{Mav}{x_0 x_1}.$$

Числа:

$$\langle\mu\rangle = \frac{0{,}80\text{ кг}}{2000\text{ с}} = 4 \cdot 10^{-4}\text{ кг/с} = 0{,}40\text{ г/с}.$$



Масса кубика от времени (по вычисленным точкам). Таяние в начале быстрее, в конце медленнее; средняя скорость — наклон хорды (бирюзовый пунктир) между начальной и конечной точками.

Обратите внимание: скорость таяния в каждый момент непостоянна — в начале $Mav/x_0^2 = 1{,}0$ г/с, у края $Mav/x_1^2 = 0{,}04$ г/с. Среднее по

определению условия — не среднее этих двух чисел, а отношение полной растаявшей массы ко всему времени.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}\cdot\text{см}\cdot\text{см/с}}{\text{см}\cdot\text{см}} = \text{кг/с}$. Второй способ через мгновенную скорость: $\mu(t) = -\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{Mav}{(x_0+vt)^2}$; среднее по времени $\dfrac{1}{t_1}\displaystyle\int_0^{t_1}\mu\,dt = \dfrac{m_0-m_1}{t_1}$ — та же величина. Предел: при $x_1 \to x_0$ ответ $\to Mav/x_0^2$, мгновенная скорость в начале — верно.

Ответ. $\langle\mu\rangle = \dfrac{Mav}{x_0x_1} = 0{,}40$ г/с.