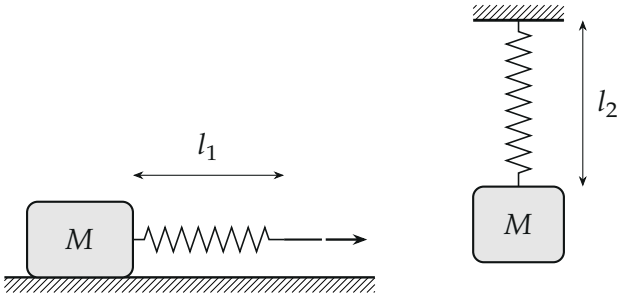
Мешок яблок и пружина

Задача 2. [Курчатов 2025/26, 7 класс, задача 2] Садовод плотно упаковал яблоки в мешок так, чтобы их суммарная масса составила $M = 24$ кг. Пытаясь сдвинуть мешок вдоль горизонтальной поверхности при помощи пружины, садовод заметил, что при длине пружины $l_1 = 140$ мм мешок с яблоками сдвинулся с места. Подвесив мешок на той же пружине вертикально, садовод вновь измерил длину пружины и обнаружил, что её длина в состоянии равновесия составила $l_2 = 170$ мм. Найдите длину пружины l_0 в недеформированном состоянии. Коэффициент трения между мешком и горизонтальной поверхностью составляет $\mu = 0{,}5$. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.



Поясняющий рисунок: слева мешок тянут по полу через пружину (в момент сдвига её длина l_1), справа мешок висит на той же пружине (длина l_2).

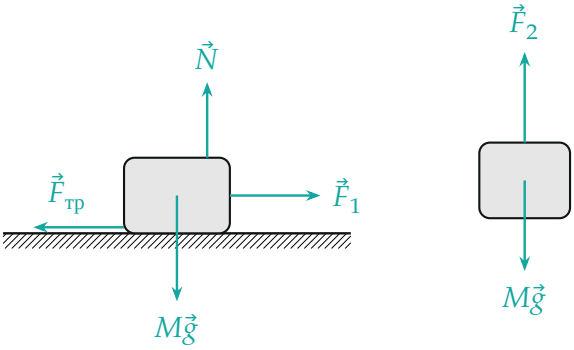
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон Гука и равновесие. Неизвестных две — жёсткость k и длина l_0; опытов тоже два. В каждом опыте сила упругости пружины уравновешивает известную силу: в первом — наибольшую силу трения покоя μMg (мешок «вот-вот сдвинется»), во втором — силу тяжести Mg. Разность длин даёт жёсткость, а потом и l_0.

Обозначения. k — жёсткость пружины; F_1, F_2 — силы упругости в первом и втором опытах. Пружина растянута (садовод тянет мешок), удлинение $l - l_0 > 0$.

1. Опыт на полу. Запишем второй закон Ньютона для мешка в проекциях. По вертикали мешок не движется: $N = Mg$. По горизонтали

в момент сдвига трение покоя достигает наибольшего значения μN, и сила упругости ему равна:

$$F_1 = \mu Mg = 0{,}5 \cdot 24 \cdot 10 = 120 \text{ Н}.$$



Силы на мешок: слева — в момент сдвига на полу ($F_1 = F_{тр} = \mu Mg$), справа — в равновесии на пружине ($F_2 = Mg$).

2. Опыт с подвешиванием. Мешок висит в равновесии — второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$F_2 = Mg = 24 \cdot 10 = 240 \text{ Н}.$$

3. Закон Гука для двух опытов.

$$F_1 = k(l_1 - l_0), \qquad F_2 = k(l_2 - l_0).$$

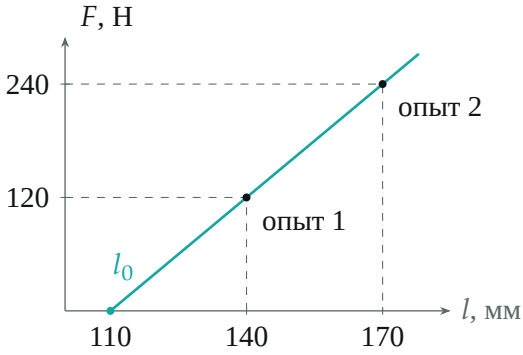
Вычтем первое из второго — l_0 уйдёт:

$$F_2 - F_1 = k(l_2 - l_1) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F_2 - F_1}{l_2 - l_1} = \frac{120 \text{ Н}}{0{,}030 \text{ м}} = 4000 \text{ Н/м}.$$

4. Длина недеформированной пружины.

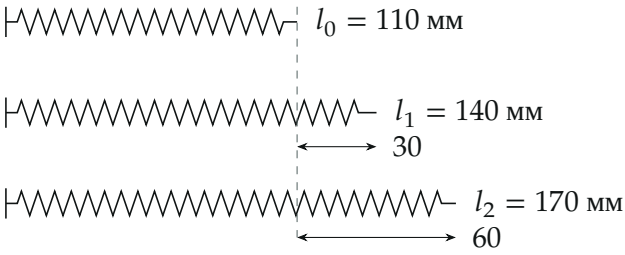
$$l_0 = l_1 - \frac{F_1}{k} = 140 \text{ мм} - \frac{120}{4000} \text{ м} = 140 \text{ мм} - 30 \text{ мм} = 110 \text{ мм}.$$

Короче, без k: $F_2 = 2F_1$, поэтому удлинение во втором опыте вдвое больше: $l_2 - l_0 = 2(l_1 - l_0)$, откуда $l_0 = 2l_1 - l_2 = 280 - 170 = 110$ мм.



Закон Гука: прямая через две точки опытов пересекает ось длин в точке $l_0 = 110$ мм; наклон прямой — жёсткость $k = 4000$ Н/м.

Обратите внимание: в первом опыте трение — это трение покоя на пределе, μMg; до сдвига оно меньше и равно силе пружины, а не μMg. Поэтому важно слово «сдвинулся» — оно и говорит, что трение достигло максимума.



Длины пружины: удлинения 30 и 60 мм относятся как силы 120 : 240 = 1 : 2.

Проверка. Размерность k — Н/м, l_0 — мм. Подстановка: $4000 \cdot 0{,}030 = 120$ Н, $4000 \cdot 0{,}060 = 240$ Н — обе силы сходятся. Замечание: если бы садовод не тянул, а толкал мешок сжатой пружиной, было бы $k(l_0 - l_1) = \mu Mg$ и $l_0 = (2l_1 + l_2)/3 = 150$ мм; в задаче мешок тянут, как подразумевают и организаторы.

Ответ. $l_0 = 2l_1 - l_2 = 110$ мм ($k = 4000$ Н/м).