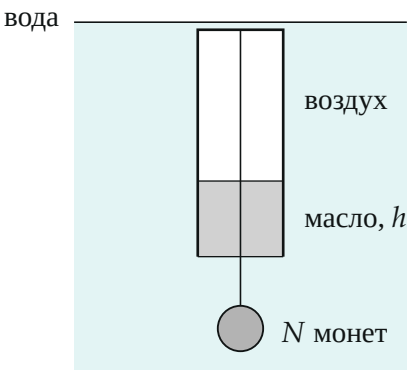
Колокол пирата

Задача 3. [Курчатов 2025/26, 7 класс, задача 3] Пират опускает в воду ($\rho_в = 1000$ кг/м^3) лёгкий жёсткий колокол объёмом $V = 3{,}0$ л в виде цилиндра, открытый снизу. Внутри колокола находится слой масла толщиной $h = 10$ см и плотностью $\rho_м = 900$ кг/м^3, которое не смешивается с водой. Площадь основания колокола $S = 100$ см^2. К колоколу привязан мешочек с золотыми монетами. Масса каждой монеты $m_0 = 25$ г, а её объём $V_0 = 1{,}5$ см^3. Какое максимальное количество монет N может находиться в мешочке, чтобы система всё ещё могла плавать? Массой самого колокола, верёвки и мешочка пренебречь. Считайте, что при погружении колокола в воду воздух, запертый под колоколом, практически не сжимается. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.



Поясняющий рисунок (по рисунку организаторов): колокол открытым дном вниз, под крышкой воздух, ниже слой масла, снизу на верёвке мешочек с монетами.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на условие плавания. Колокол лёгкий, но вместе с воздухом и маслом он вытесняет много воды — 3 л, а весит только масло. Монеты тяжёлые и почти не добавляют объёма. Чем больше монет, тем глубже садится система; предел — когда она погружена целиком, и сила Архимеда больше расти не может. Тогда сила тяжести системы должна быть не больше максимальной силы Архимеда.

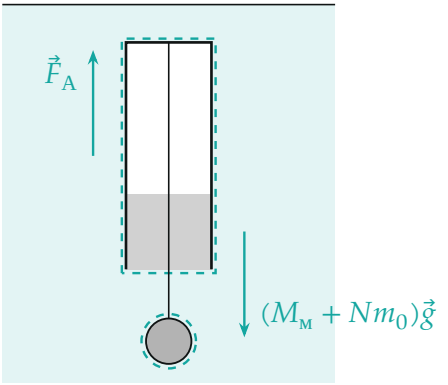
Обозначения. Система — колокол + воздух + масло + верёвка + мешочек с монетами; $M_м$ — масса масла; $V_{выт}$ — объём, вытесняемый системой при полном погружении.

1. Масса масла.

$$M_м = \rho_м S h = 900 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}1 = 0{,}9 \text{ кг}.$$

2. Какой объём вытесняет система. Воздух не сжимается, поэтому вода в колокол не заходит: весь его объём V занят воздухом и маслом, граница с водой — нижний срез колокола. Вода давит на систему по всей её внешней поверхности: крышка колокола, его стенки, нижний срез масла, мешочек. Сила Архимеда — вес воды в объёме, который ограничен этой поверхностью:

$$V_{выт} = V + NV_0.$$



Предельный случай: система погружена целиком. Бирюзовый пунктир — граница вытесненного объёма $V + NV_0$; на систему действуют сила тяжести и сила Архимеда (стрелки отодвинуты от тела, чтобы не закрывать его).

3. Условие плавания. Система ещё может плавать, если при полном погружении сила Архимеда не меньше силы тяжести (иначе она тонет):

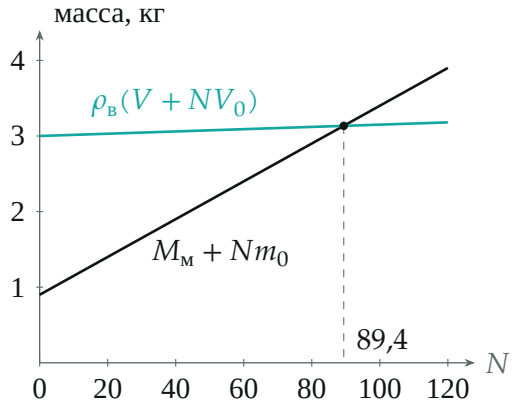
$$(M_м + Nm_0)\, g \le \rho_в g\, (V + NV_0).$$

Сократим на g и соберём N слева:

$$N\,(m_0 - \rho_в V_0) \le \rho_в V - M_м.$$

Каждая монета добавляет $m_0 = 25$ г массы и $\rho_в V_0 = 1{,}5$ г «подъёмной силы»; разность 23,5 г положительна, поэтому неравенство даёт ограничение сверху:

$$N \le \frac{\rho_в V - M_м}{m_0 - \rho_в V_0} = \frac{3{,}0 - 0{,}9}{0{,}025 - 0{,}0015} = \frac{2{,}1}{0{,}0235} \approx 89{,}4.$$



Масса системы (чёрная прямая) и масса воды в объёме полностью погружённой системы (бирюзовая). Плавать система может левее точки пересечения, $N \le 89{,}4$.

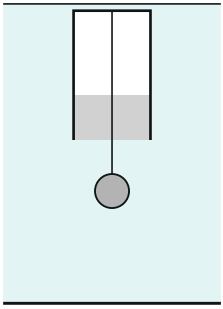
4. Целое число монет. N — целое и не больше 89,4, поэтому $N_{max} = 89$. Проверим соседние значения:

$$N = 89:\ 0{,}9 + 2{,}225 = 3{,}125 \text{ кг} < 3{,}1335 \text{ кг};$$

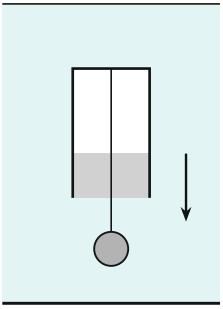
$$N = 90:\ 3{,}150 \text{ кг} > 3{,}1350 \text{ кг}.$$

При 89 монетах система плавает почти целиком под водой, при 90 — тонет.

Обратите внимание: в вытесненный объём входит весь колокол, включая воздух, хотя масса воздуха и колокола не учитывается. Именно воздух «держит» монеты — это и есть идея водолазного колокола.



$N = 89$: плавает



$N = 90$: тонет

При 89 монетах крышка колокола у самой поверхности, при 90 система уходит вниз (стрелка) и ложится на дно.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м}^3 - \text{кг}}{\text{кг}}$ — безразмерное число. Предел: без масла получилось бы $3{,}0/0{,}0235 \approx 127$ монет — масло «съедает» 0,9 кг подъёмной силы, и монет меньше; при $m_0 = \rho_\text{в} V_0$ (монета плотности воды) ограничения не было бы — так и следует из знаменателя.

Ответ. $N \le \dfrac{\rho_\text{в} V - \rho_\text{м} S h}{m_0 - \rho_\text{в} V_0} \approx 89{,}4, \quad N_\text{max} = 89.$