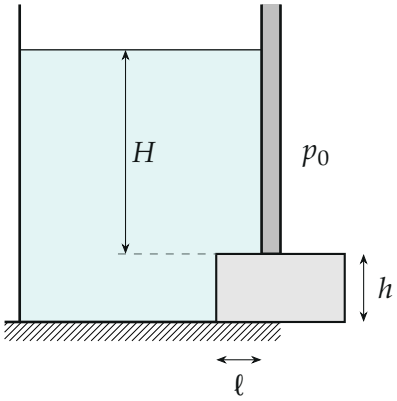
Пробка в стенке сосуда

Задача 4. [Курчатов 2025/26, 7 класс, задача 4] В прямоугольный высокий сосуд налита жидкость плотности $\rho = 1000$ кг/м^3. В одной из стенок у дна сосуда имеется прямоугольное отверстие высоты $h = 5$ см, в которое вставлена пробка такого же сечения. Расстояние от стенки сосуда до края пробки внутри жидкости равно $\ell = 1$ см. Между пробкой и дном сосуда жидкость не проникает. При какой минимальной высоте H уровня жидкости над пробкой жидкость сможет её вытолкнуть наружу? Коэффициент трения пробки о дно сосуда равен $\mu = 0{,}3$. Атмосферное давление равно $p_0 = 100$ кПа. Трением пробки о стенки сосуда пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.



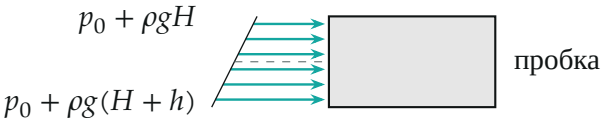
Поясняющий рисунок: пробка высотой h вставлена в отверстие стенки у самого дна, внутрь сосуда выступает на ℓ и лежит на дне; уровень жидкости на H выше пробки.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатическое давление и трение покоя. Жидкость давит на внутренний торец пробки и толкает её наружу; снаружи на торец давит атмосфера. Кроме того, жидкость давит сверху на ту часть пробки, что лежит на дне, и прижимает её к дну — отсюда сила трения, которая растёт вместе с H. Пробка вылетит, когда выталкивающая сила сравняется с наибольшей силой трения покоя плюс атмосферное давление снаружи.

Обозначения. d — ширина отверстия (в ответ войдёт); $S = hd$ — площадь торца; $p_{\text{ср}}$ — среднее давление жидкости на торец; ось x — горизонтально наружу. Силу тяжести пробки не учитываем (о её массе ничего не сказано).

1. Давление на внутренний торец. Давление в жидкости растёт с глубиной: $p(y) = p_0 + \rho g y$, где y — глубина. По торцу глубина меняется от H до $H + h$ линейно, поэтому средняя сила — как при давлении на середине высоты:

$$p_{\text{ср}} = p_0 + \rho g \left(H + \frac{h}{2} \right), \qquad F_{\text{ж}} = p_{\text{ср}}\, hd.$$



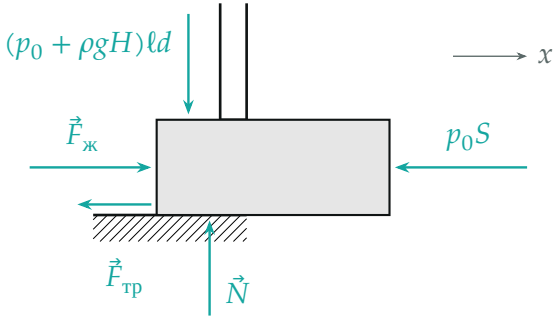
Давление жидкости на торец пробки растёт с глубиной линейно (длина стрелок — по величине давления), поэтому средняя сила — как при давлении на середине высоты, на глубине $H + h/2$.

2. Сила трения. Сверху на часть пробки внутри сосуда (площадь ℓd) давит жидкость с давлением $p_0 + \rho g H$ — это верхняя грань пробки, глубина H. Снизу жидкости нет (она не проникает между пробкой и дном), поэтому вертикально пробку уравновешивает только сила реакции дна. Второй закон Ньютона для пробки в проекции на вертикаль:

$$N = (p_0 + \rho g H)\, \ell d.$$

Часть пробки снаружи сосуда окружена воздухом со всех сторон, и давление на неё сверху и снизу одинаково. Наибольшая сила трения покоя:

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu\, (p_0 + \rho g H)\, \ell d.$$



Силы на пробку в момент, когда она вот-вот сдвинется наружу: давление жидкости на торец $\vec{F}_{ж}$, атмосфера снаружи $p_0 S$, прижимающее давление сверху, реакция дна $\vec{N}$ и трение покоя $\vec{F}_{тр}$ внутрь.

3. Условие выталкивания. Второй закон Ньютона для пробки в проекции на ось x: пробка сдвинется, если сила давления жидкости не меньше суммы атмосферной силы и наибольшего трения покоя:

$$\left(p_0 + \rho g\left(H + \frac{h}{2}\right)\right) hd \;\geq\; p_0 hd + \mu\,(p_0 + \rho g H)\,\ell d.$$

Атмосферная часть давления на торец сокращается с силой $p_0 hd$ снаружи, ширина d — тоже:

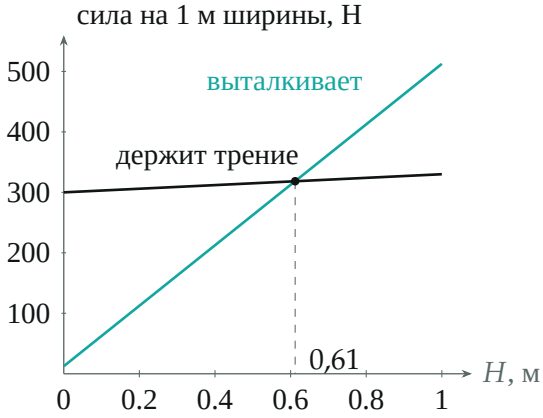
$$\rho g h H + \frac{\rho g h^2}{2} \;\geq\; \mu\rho g \ell H + \mu p_0 \ell.$$

Обратите внимание: атмосферное давление в трении не сокращается — оно прижимает пробку к дну сверху, а снизу ему ничто не противостоит. Поэтому p_0 входит в ответ, и именно оно в основном и держит пробку.

4. Минимальная высота. Так как $h > \mu\ell$, неравенство даёт ограничение снизу:

$$H \geq \frac{\mu p_0 \ell - \rho g h^2/2}{\rho g\,(h - \mu\ell)} =$$

$$= \frac{0{,}3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}01 - 10^4 \cdot 0{,}05^2/2}{10^4 \cdot (0{,}05 - 0{,}003)} = \frac{300 - 12{,}5}{470} \approx 0{,}61 \text{ м}.$$



На метр ширины отверстия: выталкивающая сила $\rho g h(H + h/2)$ (бирюза) и наибольшее трение покоя $\mu(p_0 + \rho g H)\ell$ (чёрная) от H. Пробка вылетает правее пересечения, $H \geq 0{,}61$ м.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Па}\cdot\text{м}}{\text{кг/м}^3\cdot\text{Н/кг}\cdot\text{м}} = \dfrac{\text{Н/м}}{\text{Н/м}^2} = \text{м}$. Подстановка $H = 0{,}612$ м: давит $10^4\cdot 0{,}05\cdot 0{,}637 \approx 318$ Н/м, держит $0{,}3\cdot(10^5+6120)\cdot 0{,}01 \approx 318$ Н/м — равны. Предел: без трения ($\mu = 0$) получилось бы $H < 0$ — пробку вытолкнула бы любая жидкость, верно.

Ответ. $H_{\min} = \dfrac{\mu p_0 \ell - \rho g h^2/2}{\rho g\,(h - \mu\ell)} \approx 0{,}61$ м.