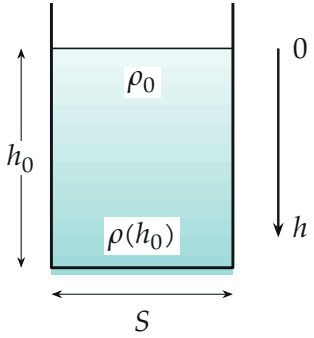
Сжимаемая жидкость

Задача 5. [Курчатов 2025/26, 7 класс, задача 5] В цилиндрический сосуд, площадь основания которого равна S, налита сжимаемая жидкость массы $M = 750$ г, плотность ρ которой в результате действия силы тяжести зависит от глубины h по закону $\rho(h) = \rho_0(1 + \alpha h)$, где $\rho_0 = 1$ г/см^3, $\alpha = 0{,}01$ см$^{-1}$. На сколько изменится высота столба жидкости, если в неё опустить кубик массы $m = 500$ г? Известно, что кубик плавает в жидкости, целиком погрузившись в неё.



Поясняющий рисунок: столб жидкости высотой h_0; глубина h отсчитывается от поверхности вниз, жидкость внизу плотнее (темнее).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику жидкости с переменной плотностью. Главная идея: давление на дно цилиндрического сосуда равно весу всего его содержимого, делённому на S, — и это давление по-прежнему создаёт столб жидкости. Плавающий кубик добавляет к содержимому свою массу и ничего больше, поэтому новая высота столба такая же, как у жидкости массы $M + m$ без кубика.

Обозначения. h_0 — высота столба без кубика, h_1 — с кубиком, $\Delta h = h_1 - h_0$; глубина h отсчитывается вниз от поверхности жидкости.

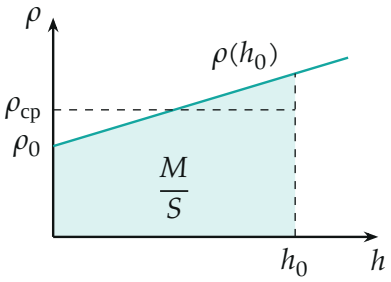
1. Масса столба через среднюю плотность. Плотность растёт с глубиной линейно: от ρ_0 у поверхности до $\rho_0(1 + \alpha h_0)$ у дна. Разобьём столб на тонкие слои одинаковой толщины: слой на глубине h и слой на глубине $h_0 - h$ вместе весят столько же, сколько два слоя средней

плотности $\rho_{ср}$, где

$$\rho_{ср} = \frac{\rho_0 + \rho_0(1 + \alpha h_0)}{2} = \rho_0 \left(1 + \frac{\alpha h_0}{2}\right).$$

На графике $\rho(h)$ масса столба, делённая на S, — площадь трапеции под прямой (рисунок 2):

$$M = \rho_{ср} S h_0 = \rho_0 S h_0 \left(1 + \frac{\alpha h_0}{2}\right).$$



Плотность растёт с глубиной линейно; масса столба на единицу площади — площадь трапеции, она равна $\rho_{ср} h_0$.

Получилось квадратное уравнение для h_0:

$$\alpha h_0^2 + 2h_0 - \frac{2M}{\rho_0 S} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{1 + \frac{2\alpha M}{\rho_0 S}} - 1\right]$$

(второй корень отрицательный, он не подходит).

2. Почему кубик действует как добавленная жидкость. Кубик плавает, не касаясь дна, значит, по второму закону Ньютона для кубика сила Архимеда уравновешивает силу тяжести mg. Рассмотрим всё содержимое сосуда (жидкость + кубик). Оно покоится; снаружи на него действуют сила тяжести $(M + m)g$ и сила давления дна $p_{дна} S$ (стенки давят горизонтально). Условие равновесия содержимого по вертикали:

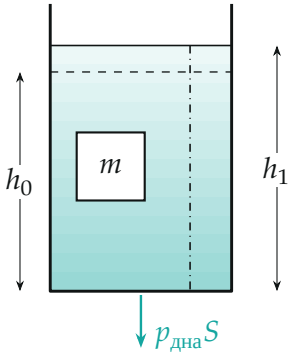
$$p_{дна} S = (M + m)g.$$

С другой стороны, давление у дна создаёт столб жидкости над ним. Проведём вертикаль сбоку от кубика (рисунок 3): вдоль неё только жидкость, и плотность на каждой глубине та же функция $\rho(h)$, так что

$$p_{\text{дна}} = g \cdot \rho_0 h_1 \left(1 + \frac{\alpha h_1}{2}\right).$$

Сравнивая, получаем для h_1 то же уравнение, что в пункте 1, только с массой $M + m$:

$$\rho_0 S h_1 \left(1 + \frac{\alpha h_1}{2}\right) = M + m \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{1 + \frac{2\alpha(M+m)}{\rho_0 S}} - 1\right].$$



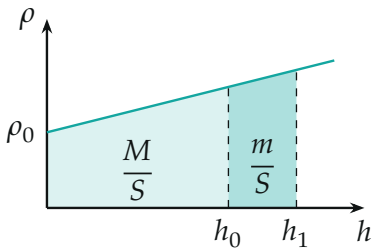
С кубиком уровень поднялся с h_0 (пунктир) до h_1. Вдоль штрихпунктирной вертикали — только жидкость, давление у дна создаёт её столб высотой h_1; стрелка — сила, с которой содержимое давит на дно.

3. Изменение высоты.

$$\Delta h = h_1 - h_0 = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{1 + \frac{2\alpha(M+m)}{\rho_0 S}} - \sqrt{1 + \frac{2\alpha M}{\rho_0 S}}\right].$$

Площадь S в условии не дана числом, поэтому ответ — формула. Например, при $S = 100$ см^2: $\dfrac{2\alpha M}{\rho_0 S} = 0{,}15$, $\dfrac{2\alpha(M+m)}{\rho_0 S} = 0{,}25$, $\Delta h =$

$100\,(\sqrt{1{,}25}-\sqrt{1{,}15}) \approx 4{,}56$ см — чуть меньше, чем $\dfrac{m}{\rho_0 S} = 5$ см у несжимаемой жидкости.



Добавка массы m — полоска площади m/S справа от h_0; плотность там больше ρ_0, поэтому полоска уже, чем $m/(\rho_0 S)$.

Обратите внимание. Объём кубика в ответ не входит: важна только масса плавающего тела. Сравнивать «объём вытесненной жидкости» с подъёмом уровня здесь неудобно — жидкость по пути сжимается, и плотность на разных глубинах разная; условие равновесия всего содержимого обходит эту трудность.

Проверка. Размерность: $\alpha M/(\rho_0 S)$ — (1/см)·г/(г/см^3·см^2), безразмерно; $1/\alpha$ — сантиметры. Предел $\alpha \to 0$ (несжимаемая жидкость): $\sqrt{1+2x} \approx 1 + x$, и $\Delta h \to \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha m}{\rho_0 S} = \dfrac{m}{\rho_0 S}$ — обычный подъём уровня от плавающего тела. С ростом сжимаемости подъём меньше: добавленная масса ложится внизу, где жидкость плотнее.

Ответ. $\Delta h = \dfrac{1}{\alpha}\left[\left(1+\dfrac{2(M+m)\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2} - \left(1+\dfrac{2M\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2}\right]$; например, при $S = 100$ см^2 $\Delta h \approx 4{,}6$ см.