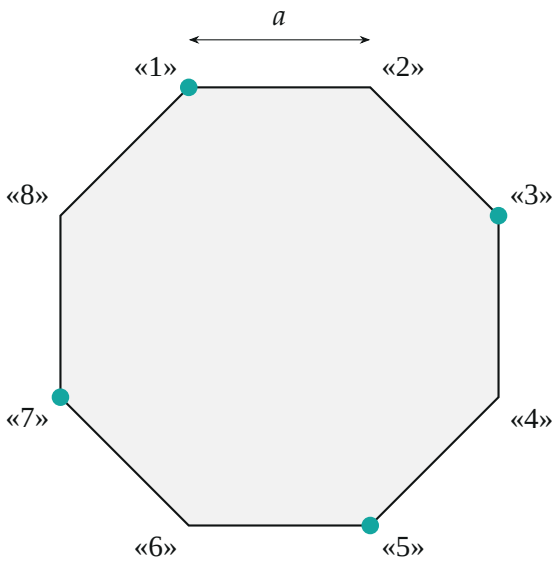
Тепловой фронт в восьмиугольнике

Задача 1. [Курчатов 2025/26, 8 класс, задача 1] Тонкая однородная металлическая пластинка имеет форму правильного восьмиугольника со стороной $a = 1$ см. Все вершины пронумерованы от «1» до «8» по часовой стрелке. В момент времени $t = 0$ в вершинах с номерами «1», «3», «5» и «7» одновременно зажигаются точечные источники теплоты. Тепловой фронт распространяется от источника по пластинке во всех направлениях с одинаковой постоянной скоростью v. Через некоторое время внутри восьмиугольника образуются области, нагретые одновременно двумя источниками. Найдите длину границы этой области в момент времени $t = \dfrac{a}{v}$.

Примечание: длина дуги окружности радиуса R вычисляется по формуле $l = \dfrac{2\pi R\alpha}{360^\circ}$, где α — градусная мера центрального угла (или дуги).



Поясняющий рисунок: восьмиугольник, вершины пронумерованы по часовой стрелке; бирюзовые точки — источники в вершинах «1», «3», «5», «7».

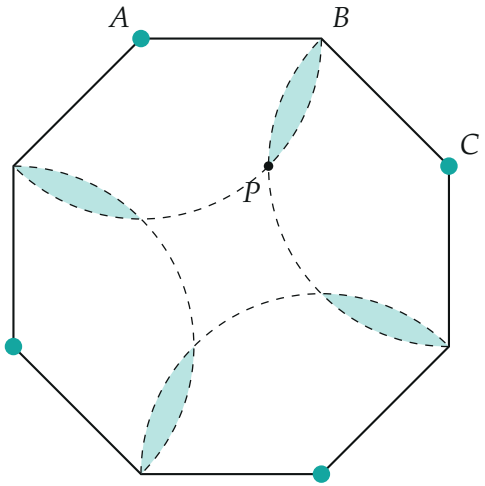
▲ **Решение.** **Что происходит.** Каждый источник за время t нагревает круг радиуса vt с центром в своей вершине. Области, нагретые двумя

источниками сразу, — это пересечения кругов («линзы»), а их граница — дуги окружностей. Задача сводится к геометрии: найти, какие дуги ограничивают линзу, и их центральные углы. Главная идея — при $t = a/v$ радиус фронта равен стороне a, поэтому промежуточная вершина между двумя источниками сама лежит на обоих фронтах.

Обозначения. Вершины «1», «2», «3» — A, B, C; R — радиус фронта; P — вторая точка пересечения фронтов от A и C; l_1 — длина одной дуги границы.

1. Радиус фронта. Фронт идёт с постоянной скоростью v во все стороны, поэтому в момент $t = a/v$ это окружность с центром в источнике радиуса

$$R = vt = v \cdot \frac{a}{v} = a.$$



Фронты в момент $t = a/v$ (пунктирные дуги радиуса a). Бирюзовые линзы — области, нагретые двумя источниками; каждая прилегает к вершине с чётным номером.

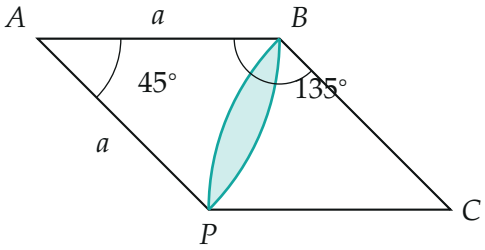
2. Точки пересечения соседних фронтов. Рассмотрим соседние источники A и C. Расстояния $AB = BC = a = R$, значит вершина B лежит на обеих окружностях — это одна точка их пересечения. Вторую обозначим P. У четырёхугольника $ABCP$ все стороны равны a: AB и BC — стороны восьмиугольника, $PA = PC = R = a$. Значит, $ABCP$ — ромб.

3. Углы ромба. Внутренний угол правильного восьмиугольника

$$\angle ABC = \frac{180^\circ \cdot (8-2)}{8} = 135^\circ.$$

В ромбе противоположные углы равны, а соседние в сумме дают 180°:

$$\angle APC = 135^\circ, \qquad \angle BAP = \angle BCP = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$



Ромб $ABCP$ со стороной a. Граница линзы (бирюза) — дуга BP окружности с центром A и дуга BP окружности с центром C, каждая с центральным углом 45°.

4. Длина границы одной линзы. Линзу ограничивают две дуги: дуга BP окружности с центром A (центральный угол $\angle BAP = 45^\circ$) и дуга BP окружности с центром C (угол $\angle BCP = 45^\circ$). По формуле из примечания

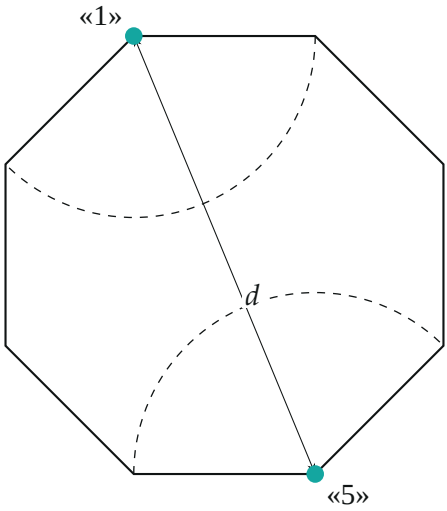
$$l_1 = \frac{2\pi a \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi a}{4}, \qquad l_{\text{линзы}} = 2l_1 = \frac{\pi a}{2}.$$

5. Сколько таких линз. Восьмиугольник переходит в себя при повороте на 90° вокруг центра, источники — тоже. Поэтому линзы одинаковы у всех четырёх вершин с чётными номерами. Противоположные источники (например, «1» и «5») не дают пересечений: расстояние между ними — большая диагональ

$$d = \frac{a}{\sin 22{,}5^\circ} \approx 2{,}61\,a > 2R = 2a.$$

Обратите внимание: каждая линза целиком внутри пластинки — её угол при вершине B равен 45° (угол между касательными к окружностям в B),

а внутренний угол восьмиугольника 135°, так что граница пластинки не обрезает линзу.



Фронты противоположных источников «1» и «5» не встречаются: между ними $d \approx 2{,}61a$, а сумма радиусов $2a$.

Соберём ответ.

$$L = 4 \cdot l_{\text{линзы}} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{2\pi a \cdot 45^\circ}{360^\circ} = 2\pi a \approx 6{,}28 \text{ см}.$$

Проверка. Размерность — длина. Второй способ для угла 45°: в равнобедренном треугольнике ABC угол $\angle BAC = (180^\circ - 135^\circ)/2 = 22{,}5^\circ$, а P симметрична B относительно AC, поэтому $\angle BAP = 2 \cdot 22{,}5^\circ = 45^\circ$ — совпадает. Любопытно, что ответ равен длине одной окружности радиуса a: восемь дуг по 45° дают ровно 360°.

Ответ. $L = 2\pi a \approx 6{,}28$ см (четыре линзы, у каждой две дуги по 45° радиуса a).