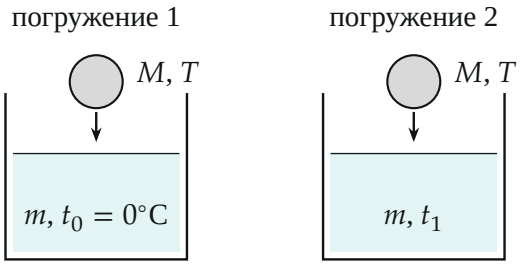
Горячий шар в калориметре

Задача 3. [Курчатов 2025/26, 8 класс, задача 3] В калориметре находится вода массой $m = 1{,}0$ кг при температуре $t_0 = 0°\text{C}$. Шар массой $M = 4{,}0$ кг имеет удельную теплоёмкость c и перед каждым погружением нагревается до температуры $T = 100°\text{C}$. Шар погружают в воду, ждут установления теплового равновесия, затем вынимают, снова нагревают до температуры T и погружают в воду во второй раз. При каком значении удельной теплоёмкости c материала шара изменение температуры воды после второго погружения максимально? Чему равно это максимальное изменение температуры воды после второго погружения? Теплопотери и теплоёмкость калориметра пренебречь, удельная теплоёмкость воды $c_\text{в} = 4200 \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °\text{C}}$.



Поясняющий рисунок: шар, нагретый до T, опускают в воду дважды; перед вторым погружением вода уже нагрета до t_1.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса и поиск максимума. Каждое погружение — теплообмен шара Mc при T с водой $mc_\text{в}$ до общей температуры. Качественно: если шар очень лёгкий по теплоёмкости ($Mc \ll mc_\text{в}$), он почти ничего не приносит ни в первый, ни во второй раз. Если очень «ёмкий» ($Mc \gg mc_\text{в}$), уже первое погружение доводит воду почти до T, и второму нечего добавить. Значит, прирост во втором погружении максимален при каком-то промежуточном c.

Обозначения. $A = Mc$, $B = mc_\text{в}$ — теплоёмкости шара и воды; $x = A/B$; t_1, t_2 — температура воды после первого и второго погружений; $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ — искомое изменение.

1. Первое погружение. Уравнение теплового баланса (шар остывает от T до t_1, вода нагревается от 0 до t_1, потерь нет):

$$A(T - t_1) = B(t_1 - 0) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{A}{A + B}\,T.$$

2. Второе погружение. Шар снова при T, вода при t_1:

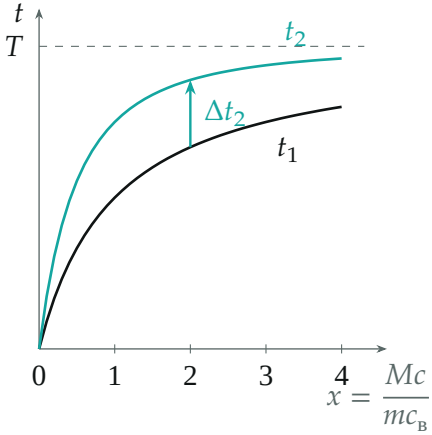
$$A(T - t_2) = B(t_2 - t_1).$$

Нам нужно не t_2, а прирост $\Delta t_2 = t_2 - t_1$. Запишем баланс сразу через него: $T - t_2 = (T - t_1) - \Delta t_2$, поэтому

$$A((T - t_1) - \Delta t_2) = B\,\Delta t_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{A}{A + B}\,(T - t_1).$$

Второе погружение работает так же, как первое, только начальная разность температур уже не T, а $T - t_1 = \dfrac{B}{A + B}\,T$. Подставим:

$$\Delta t_2 = T\,\frac{AB}{(A + B)^2} = T\,\frac{x}{(1 + x)^2}.$$



Температура воды после первого (t_1, чёрная) и второго (t_2, бирюзовая) по-

гружений в долях T по вычисленным точкам. Разрыв между кривыми — прирост Δt_2; он больше всего при $x = 1$.

3. Максимум прироста. Воспользуемся тождеством $4AB = (A + B)^2 - (A - B)^2$:

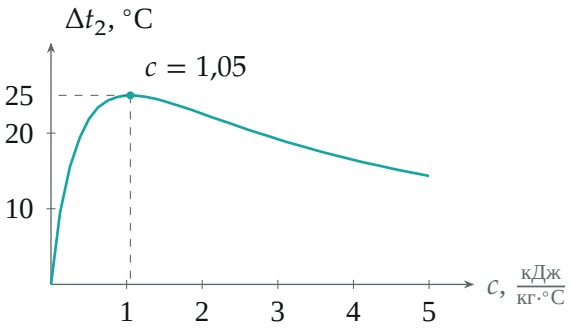
$$\Delta t_2 = \frac{T}{4}\left(1 - \left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2\right).$$

Квадрат неотрицателен и равен нулю только при $A = B$. Поэтому $\Delta t_2 \le T/4$, и максимум достигается при

$$Mc = mc_{\text{в}} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{mc_{\text{в}}}{M} = \frac{1{,}0 \cdot 4200}{4{,}0} = 1050\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}},$$

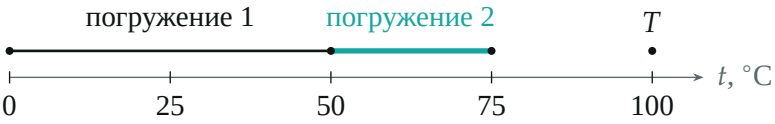
$$\Delta t_{2\,\max} = \frac{T}{4} = 25{}^\circ\text{C}.$$

Второй способ: $\dfrac{x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{x + 2 + 1/x}$, а $x + 1/x \ge 2$ с равенством при $x = 1$ — снова максимум $1/4$ при $Mc = mc_{\text{в}}$.



Прирост температуры во втором погружении в зависимости от теплоёмкости шара (по точкам формулы $\Delta t_2 = T\,x/(1+x)^2$, $x = c/1050$). Максимум $25{}^\circ C$ при $c = 1050$ Дж/(кг · °C).

Обратите внимание: спрашивают не температуру после второго погружения (она растёт с c всё время, к T), а её изменение во втором погружении; у t_2 максимума нет.



При $Mc = mc_в$: первое погружение делит разность $0 \dots T$ пополам ($t_1 = 50°C$), второе — пополам оставшуюся ($t_2 = 75°C$), прирост $25°C$.

Проверка. Размерность: $c = mc_в/M$ — Дж/(кг·°C). Пределы: при $c \to 0$ и при $c \to \infty$ $\Delta t_2 \to 0$, как и ожидали в «Что происходит». Численно при $c = 1050$: $t_1 = 50°C$, $t_2 = 75°C$, $\Delta t_2 = 25°C$; при $c = 1000$ и $c = 1100$ получается $24{,}99°C$ — меньше.

Физический смысл: прирост — произведение двух дробей, «сколько шар забирает из разности температур» ($\frac{A}{A+B}$) и «сколько разности осталось после первого раза» ($\frac{B}{A+B}$); их произведение при постоянной сумме 1 наибольшее, когда они равны.

Ответ. $c = \dfrac{mc_в}{M} = 1050\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °C}$; $\Delta t_{2\,\max} = \dfrac{T}{4} = 25°C$.