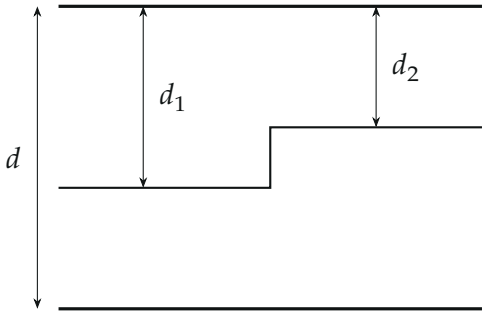
Фольга в растворе соли

Задача 4. [Курчатов 2025/26, 8 класс, задача 4] В большом сосуде с раствором соли стоят две большие металлические пластины, параллельные друг другу. Раствор проводит электрический ток. Расстояние между пластинами равно $d = 10$ см, а сопротивление раствора между пластинами равно R. Затем между пластинами вставили тонкую идеально проводящую фольгу (её сопротивлением пренебречь) и изогнули так, как показано на рисунке: на одной стороне расстояние от верхней пластины до фольги равно $d_1 = 6$ см, а на другой стороне равно $d_2 = 4$ см. Найдите отношение нового сопротивления R' между внешними пластинами к первоначальному сопротивлению R, то есть величину $\dfrac{R'}{R}$. Размеры пластин намного больше расстояния между ними, поэтому влиянием краёв можно пренебречь и считать, что ток течёт строго перпендикулярно пластинам.



Пластины (жирные линии) и изогнутая фольга между ними (как на рисунке организаторов).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на эквивалентную схему. Фольга идеально проводит, поэтому все её точки имеют один потенциал — она работает как провод, соединяющий куски раствора. Ток идёт строго перпендикулярно пластинам, значит раствор распадается на «столбики», и каждый столбик — отдельный резистор $\rho \cdot$ длина/площадь. Остаётся понять, как резисторы соединены.

Обозначения. ρ — удельное сопротивление раствора; S — площадь пластины; ступенька фольги делит площадь пополам (по рисунку), так

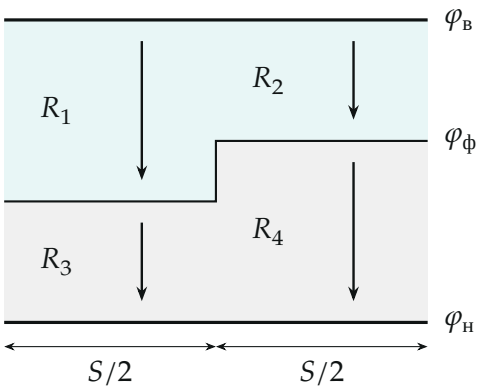
что слева и справа по $S/2$. $\varphi_в$, $\varphi_ф$, $\varphi_н$ — потенциалы верхней пластины, фольги и нижней пластины.

1. Исходное сопротивление. Однородный слой толщины d и площади S:

$$R = \frac{\rho d}{S}.$$

2. Четыре куска раствора. Фольга режет зазор на верхний слой (между верхней пластиной и фольгой) и нижний (между фольгой и нижней пластиной). Каждый слой из-за ступеньки состоит из двух частей площади $S/2$:

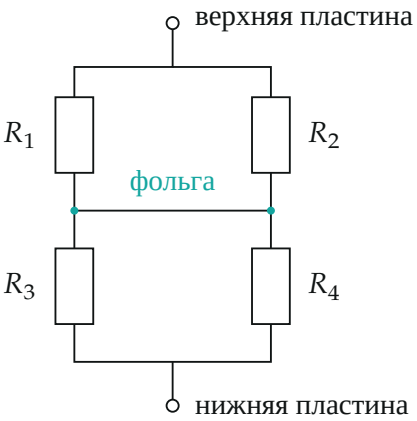
$$R_1 = \frac{\rho d_1}{S/2}, \quad R_2 = \frac{\rho d_2}{S/2}, \quad R_3 = \frac{\rho(d-d_1)}{S/2}, \quad R_4 = \frac{\rho(d-d_2)}{S/2}.$$



Зазор делится на четыре столбика. Ток (стрелки) идёт перпендикулярно пластинам; все точки фольги при одном потенциале $\varphi_ф$.

3. Как соединены куски. Столбики R_1 и R_2 присоединены одним концом к верхней пластине, другим — к фольге: на обоих одно напряжение $\varphi_в - \varphi_ф$, значит они соединены параллельно. Так же параллельны R_3 и R_4 (между фольгой и нижней пластиной). Весь ток проходит сначала верхний слой, потом нижний — слои соединены последовательно. Обратите внимание: без фольги верхняя часть столбика и нижняя часть

одного и того же столбика шли бы последовательно; фольга позволяет току перетекать вбок и меняет схему.



Эквивалентная схема: $(R_1 \parallel R_2)$ *последовательно с* $(R_3 \parallel R_4)$.

4. Сопротивление схемы. Для параллельных $\dfrac{R_iR_j}{R_i+R_j}$, для последовательных — сумма:

$$R' = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = \frac{2\rho}{S}\left(\frac{d_1d_2}{d_1+d_2} + \frac{(d-d_1)(d-d_2)}{2d-d_1-d_2}\right).$$

Делим на $R = \rho d/S$ — ρ и S уходят:

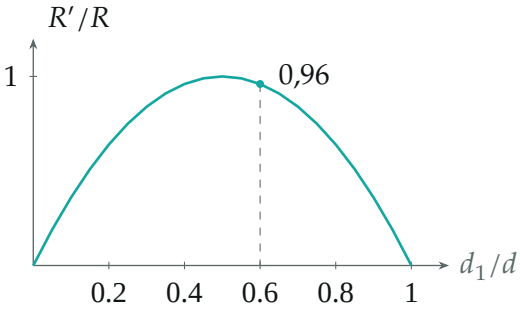
$$\frac{R'}{R} = \frac{2}{d}\left(\frac{d_1d_2}{d_1+d_2} + \frac{(d-d_1)(d-d_2)}{2d-d_1-d_2}\right).$$

Числа (в сантиметрах): $\dfrac{6\cdot 4}{10} = 2{,}4$, $\dfrac{4\cdot 6}{10} = 2{,}4$, и

$$\frac{R'}{R} = \frac{2}{10}(2{,}4+2{,}4) = 0{,}96.$$

Второй способ. Здесь $d_1 + d_2 = d$, и тогда обе дроби в скобке равны d_1d_2/d, так что $R'/R = 4d_1d_2/d^2 = 4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}96$. При $d_1 = d_2$

(плоская фольга посередине) это 1: плоская фольга вдоль эквипотенциали ничего не меняет — правильный предел.



$R'/R = 4\dfrac{d_1}{d}\left(1 - \dfrac{d_1}{d}\right)$ при $d_1 + d_2 = d$ (по точкам). Чем сильнее ступенька, тем меньше сопротивление; наш случай — точка $d_1/d = 0{,}6$.

Проверка. R'/R безразмерно. Ответ меньше 1, и это понятно: фольга позволяет току в каждом слое уходить в тонкую его часть (в верхнем слое — вправо, в нижнем — влево), а параллельное соединение тонкого и толстого участков выигрывает у их последовательного соединения.

Ответ. $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{2}{d}\left(\dfrac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} + \dfrac{(d - d_1)(d - d_2)}{2d - d_1 - d_2}\right) = 0{,}96.$