Гирлянда на ёлке

Задача 5. [Курчатов 2025/26, 8 класс, задача 5] На ёлке развесили электрическую гирлянду из N одинаковых лампочек, подключённых между двумя параллельными проводами (см. рисунок). Между соседними лампочками на каждом проводе стоит одинаковый участок провода сопротивлением R. К левому концу гирлянды подключён источник постоянного напряжения U_0. Считайте, что после подключения каждая лампочка потребляет один и тот же ток I_0, причём этот ток не зависит от напряжения на лампочке. Известно, что $U_0 = 240$ В, $I_0 = 40$ мА и $R = 2$ Ом. Определите число лампочек N, если напряжение на последней (самой правой) лампочке равно $0{,}8\,U_0$.

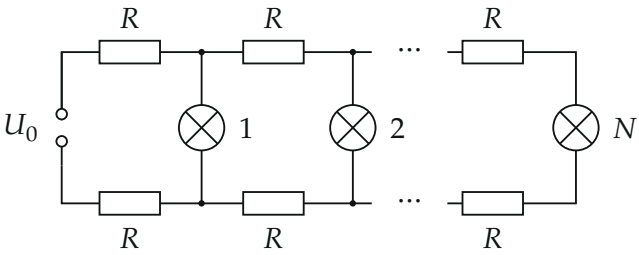


Схема гирлянды (по рисунку организаторов): N лампочек между двумя проводами, на каждом проводе между соседними лампочками — участок R.

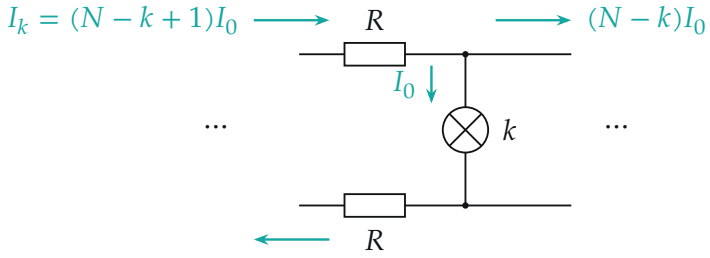
▲ **Решение. Что происходит.** Все лампочки берут одинаковый ток I_0, поэтому ток в проводе убывает слева направо: участок перед первой лампочкой несёт ток всех N лампочек, перед последней — только одной. На каждом участке провода теряется напряжение, и до правого конца доходит меньше U_0. Задача сводится к сумме падений напряжения — арифметической прогрессии.

Обозначения. Участок k — кусок провода между $(k-1)$-й и k-й лампочками (участок 1 — между источником и первой лампочкой); I_k — ток в нём; U_k — напряжение на k-й лампочке, $U_N = 0{,}8U_0$.

1. Ток на участке k. Закон сохранения заряда (первое правило Кирхгофа) для узла у каждой лампочки: ток, пришедший по проводу, делится на ток лампочки I_0 и ток дальше. Значит, по участку k течёт ток всех

лампочек с номерами $k, k+1, \ldots, N$:

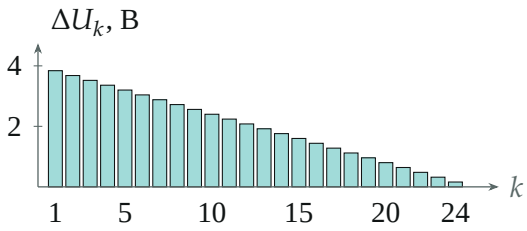
$$I_k = (N - k + 1)\, I_0.$$



Узел у лампочки k: из тока I_k лампочка забирает I_0, дальше идёт $(N-k)I_0$. По нижнему проводу тот же ток возвращается к источнику.

2. Падение напряжения на участке k. Ток I_k идёт по верхнему проводу к лампочкам и столько же возвращается по нижнему. По закону Ома на каждом из двух кусков R теряется RI_k, поэтому напряжение между проводами за участок k уменьшается на

$$\Delta U_k = 2RI_k = 2R(N - k + 1)\, I_0.$$



Падение напряжения на участках при $N = 24$: $\Delta U_k = 2R(N-k+1)I_0$ убывает от 3,84 В до 0,16 В — ступеньки арифметической прогрессии. Площадь «лестницы» — полные потери 48 В.

3. Напряжение на последней лампочке. От источника до N-й лампочки ток проходит все N участков:

$$U_N = U_0 - \sum_{k=1}^{N} \Delta U_k = U_0 - 2RI_0(N + (N-1) + \cdots + 1) =$$
$$= U_0 - 2RI_0\,\frac{N(N+1)}{2} = U_0 - RI_0N(N+1).$$

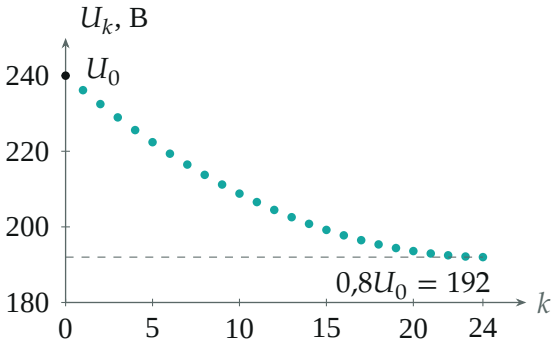
Обратите внимание: ток в первом участке — NI_0, а не I_0; ошибка «на каждом участке ток I_0» дала бы $U_N = U_0 - 2NRI_0$ и совсем другое N.

4. Уравнение на N. По условию $U_N = 0{,}8U_0$:

$$RI_0N(N+1) = 0{,}2U_0 \quad\Rightarrow\quad N(N+1) = \frac{0{,}2U_0}{RI_0} = \frac{0{,}2\cdot 240}{2\cdot 0{,}04} = 600.$$

Квадратное уравнение $N^2 + N - 600 = 0$, положительный корень:

$$N = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\cdot 600}}{2} = \frac{-1+49}{2} = 24.$$



Напряжение на k-й лампочке при $N = 24$ (вычислено по шагам ΔU_k). Сначала падает быстро (большой ток), к концу — медленно. Ось напряжений начинается со 180 В.

Проверка. Размерность: $RI_0N(N+1)$ — Ом·А = В. Подстановка: $2\cdot 0{,}04\cdot 24\cdot 25 = 48$ В $= 0{,}2\cdot 240$ В — верно. Предел: при $N = 1$

получаем $U_1 = U_0 - 2RI_0$ — одна лампочка, ток I_0 через два куска провода, как и должно быть.

Физический смысл: потеря напряжения растёт как N^2 — и ток в начале гирлянды, и число участков пропорциональны N.

Ответ. $N(N+1) = \dfrac{0{,}2U_0}{RI_0} = 600, \quad N = 24.$