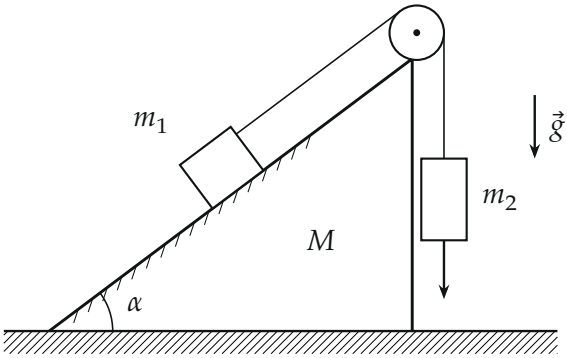
Клин с блоком и грузами

Задача 1. [Курчатов 2025/26, 9 класс, задача 1] Клин массой $M = 3$ кг находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола. Через невесомый неподвижный блок, укреплённый на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая бруски массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг. Брусок m_1 движется вверх по наклонной плоскости клина, брусок m_2 движется вертикально вниз, клин M остаётся неподвижным. Коэффициент трения между бруском m_1 и наклонной поверхностью клина равен $\mu_1 = 0{,}2$. Наклонная поверхность клина составляет угол α с горизонтом, такой, что $\sin\alpha = 0{,}6$.



1. Найдите силу нормальной реакции стола R, действующую на клин, при движении брусков.
2. Найдите минимальный коэффициент трения $\mu_{\min}$ между клином и столом, при котором клин остаётся неподвижным.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на динамику связанных тел. Клин покоится, поэтому в системе отсчёта стола он — обычное тело в равновесии, а бруски движутся с одним и тем же по модулю ускорением a (нить нерастяжима). План: второй закон Ньютона для каждого бруска даёт a и силу натяжения T; затем по третьему закону Ньютона находим, с какими силами бруски и нить давят на клин, и записываем условие равновесия клина по вертикали (это R) и по горизонтали (это нужная

сила трения покоя от стола). Второй способ — второй закон Ньютона для всей системы сразу.

Обозначения. a — модуль ускорения брусков; T — сила натяжения нити; N_1 — сила нормальной реакции клина на брусок m_1; $F_{тр1} = \mu_1 N_1$ — сила трения скольжения на брусок m_1; R — сила нормальной реакции стола на клин; $F_{тр}$ — сила трения покоя стола на клин. Оси для клина: x вправо, y вверх (рисунок 3). $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 0{,}8$.

1. Брусок m_1. На него действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}_1$, сила натяжения нити $\vec{T}$ вверх вдоль склона и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр1}$. Брусок едет вверх, значит трение направлено вниз вдоль склона. Оси: x_1 вверх вдоль склона, y_1 по нормали от склона. Ускорение направлено вверх вдоль склона (так брусок разгоняется при m_2 тяжелее; знак a проверим).

Второй закон Ньютона для бруска m_1 в проекции на ось y_1 (поперёк склона брусок не движется):

$$N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = m_1 g\cos\alpha = 16\text{ Н},$$

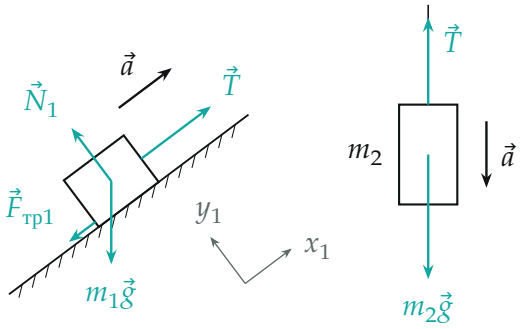
$$F_{тр1} = \mu_1 N_1 = 3{,}2\text{ Н}.$$

В проекции на ось x_1:

$$m_1 a = T - m_1 g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha.$$

2. Брусок m_2. Сила тяжести $m_2\vec{g}$ вниз, сила натяжения $\vec{T}$ вверх (блок невесомый и без трения, натяжение по обе стороны одинаково). Второй закон Ньютона в проекции на вертикаль, вниз:

$$m_2 a = m_2 g - T.$$



Силы на бруски. Слева — брусок m_1 на склоне с осями x_1 (вверх по склону) и y_1 (от склона); справа — брусок m_2. Ускорения: у m_1 вверх по склону, у m_2 вниз.

3. Ускорение и натяжение. Сложим уравнения шагов 1 и 2 — натяжение сократится:

$$(m_1 + m_2)a = m_2 g - m_1 g\,(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)\,,$$

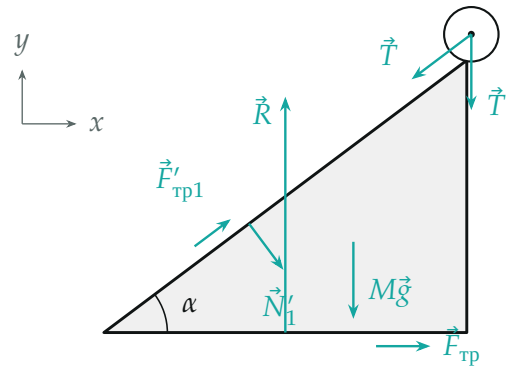
$$a = g\,\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 10 \cdot \frac{3 - 2\cdot 0{,}76}{5} = 2{,}96\ \text{м/с}^2.$$

$a > 0$, направление выбрано верно. Из уравнения для m_2:

$$T = m_2(g - a) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,g\,(1 + \sin\alpha + \mu_1\cos\alpha) = 3 \cdot 7{,}04 = 21{,}12\ \text{Н}.$$

4. Силы на клин. По третьему закону Ньютона брусок m_1 давит на клин силой $\vec{N}_1'$, равной N_1 и направленной в склон, и действует на него силой трения $\vec{F}_{тр1}'$ вверх вдоль склона (противоположно трению на брусок). Нить действует на блок, а через ось — на клин: две силы T, одна вдоль склона вниз (к бруску m_1), другая вертикально вниз (к бруску m_2). Ещё — сила тяжести $M\vec{g}$, сила нормальной реакции стола $\vec{R}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ от стола.

Направления в осях x, y: склон поднимается вправо, поэтому направление «вверх по склону» — $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, «в склон» — $(\sin\alpha; -\cos\alpha)$, «вниз по склону» — $(-\cos\alpha; -\sin\alpha)$.



Силы на клин (вместе с блоком). $\vec{N}'_1$ и $\vec{F}'_{mp1}$ — действие бруска m_1 (по третьему закону Ньютона), две силы $\vec{T}$ — действие нити на блок. Длины стрелок примерно по модулю, трение увеличено для наглядности.

Пункт 1. Сила реакции стола. Второй закон Ньютона для покоящегося клина в проекции на ось y:

$$R - Mg - N_1\cos\alpha + F_{\text{тр1}}\sin\alpha - T\sin\alpha - T = 0,$$

$$R = Mg + N_1\cos\alpha - \mu_1 N_1\sin\alpha + T\,(1+\sin\alpha)\,.$$

Знаки: сила $\vec{N}'_1$ давит в склон — вниз, поэтому увеличивает R; трение $\vec{F}'_{\text{тр1}}$ тянет клин вверх по склону и немного разгружает стол; обе силы нити тянут блок вниз. Числа:

$$R = 30+16\cdot 0{,}8-3{,}2\cdot 0{,}6+21{,}12\cdot 1{,}6 = 30+12{,}8-1{,}92+33{,}79 \approx 74{,}7\ \text{Н}.$$

Пункт 2. Минимальный коэффициент трения. Второй закон Ньютона для клина в проекции на ось x:

$$F_{\text{тр}} + N_1\sin\alpha + F_{\text{тр1}}\cos\alpha - T\cos\alpha = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = T\cos\alpha - N_1\sin\alpha - \mu_1 N_1\cos\alpha.$$

$$F_{\text{тр}} = 21{,}12\cdot 0{,}8 - 16\cdot 0{,}6 - 3{,}2\cdot 0{,}8 = 16{,}90 - 9{,}6 - 2{,}56 \approx 4{,}74\ \text{Н}.$$

$F_{\text{тр}} > 0$: стол тянет клин вправо, то есть нить, тянущая блок к бруску m_1, сильнее, чем давление бруска и его трение. Сила трения покоя не

превосходит μR, поэтому клин покоится при

$$\mu \geq \frac{F_{\text{тр}}}{R} \quad \Rightarrow \quad \mu_{\min} = \frac{4{,}736}{74{,}67} \approx 0{,}063.$$

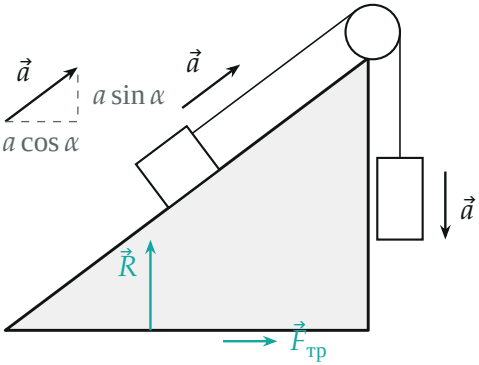
Второй способ: вся система сразу. Внутренние силы (нить, давление и трение бруска о клин) сокращаются; внешние — силы тяжести трёх тел, $\vec{R}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Ускорение есть только у брусков: у m_1 — a вверх по склону, у m_2 — a вниз. Второй закон Ньютона для системы:

$$x: \quad F_{\text{тр}} = m_1 a \cos\alpha = 2 \cdot 2{,}96 \cdot 0{,}8 \approx 4{,}74 \text{ Н},$$

$$y: \quad R - (M + m_1 + m_2)g = m_1 a \sin\alpha - m_2 a,$$

$$R = 80 + 3{,}55 - 8{,}88 \approx 74{,}7 \text{ Н}.$$

Совпадает с результатом пунктов 1 и 2.



Второй способ: внешняя горизонтальная сила одна — $\vec{F}_{тр}$ от стола, и она равна $m_1 a \cos\alpha$: только брусок m_1 разгоняется по горизонтали. Силы тяжести не показаны.

Обратите внимание. Сила трения бруска о клин действует на клин в обратную сторону — вверх по склону. Ошибка в её знаке даёт $F_{\text{тр}} \approx 9{,}86$ Н, $R \approx 78{,}5$ Н и $\mu_{\min} \approx 0{,}13$ — вдвое больше верного.

Проверка. Размерность: в R и $F_{\text{тр}}$ складываются силы в ньютонах, μ безразмерен. Предел: если бы бруски не двигались ($a = 0$), второй

способ дал бы $F_{\text{тр}} = 0$ и $R = (M + m_1 + m_2)g = 80$ Н — система покоится, стол держит её вес. При $a > 0$ брусок m_2 «падает» быстрее, чем m_1 поднимается по вертикали, и стол разгружается: $R < 80$ Н. Два независимых способа дали одни и те же $R \approx 74{,}7$ Н и $F_{\text{тр}} \approx 4{,}74$ Н.

Ответ. 1) $R = Mg + m_1 g\cos^2\alpha - \mu_1 m_1 g \sin\alpha\cos\alpha + T(1+\sin\alpha) \approx 74{,}7$ Н, где $T = \dfrac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \sin\alpha + \mu_1\cos\alpha) = 21{,}1$ Н; 2) $\mu_{\min} = \dfrac{m_1 a\cos\alpha}{R} \approx 0{,}063$, где $a = 2{,}96$ м/с^2.