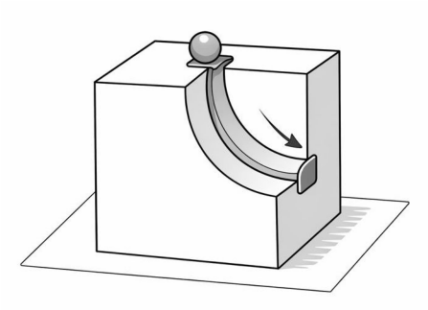
Шарик в желобе кубика

Задача 2. [Курчатов 2025/26, 9 класс, задача 2] Кубик массой M стоит на гладкой горизонтальной поверхности. Внутри кубика закреплён гладкий желоб в форме четверти дуги окружности. Желоб соединяет центр верхней грани с центром правой боковой грани. В верхнее отверстие кладут шарик массой m, не сообщая ему начальной скорости. Найдите скорость кубика в момент вылета шарика из бокового отверстия. Отношение массы шарика к массе кубика $k = \dfrac{m}{M} = 1{,}25$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Длина ребра кубика составляет 0,081 м.



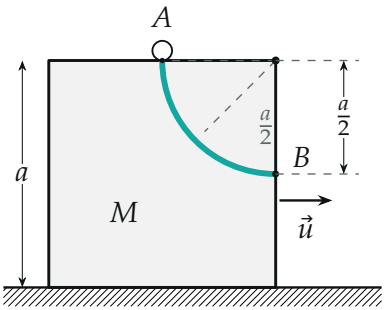
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на законы сохранения для системы «шарик + кубик». Шарик скатывается по желобу и толкает кубик вбок: желоб давит на шарик, шарик — на кубик, и кубик разгоняется влево, пока шарик движется вправо. Сил трения нет, поэтому сохраняются полная механическая энергия системы и горизонтальная проекция её импульса (стол гладкий, внешние силы — тяжести и реакции стола — вертикальны). Две неизвестные скорости в момент вылета — два закона сохранения.

Обозначения. $a = 0{,}081$ м — ребро кубика; v — скорость шарика в момент вылета (в системе стола), V — скорость кубика в этот момент; ось x — вправо, вдоль направления вылета.

1. Геометрия желоба. Дуга — четверть окружности от центра верхней грани (высота a) до центра правой грани (высота $a/2$). Её центр —

середина верхнего правого ребра, радиус $a/2$. В точке вылета касательная к дуге перпендикулярна правой грани, то есть горизонтальна. Шарик опускается на

$$\Delta h = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$



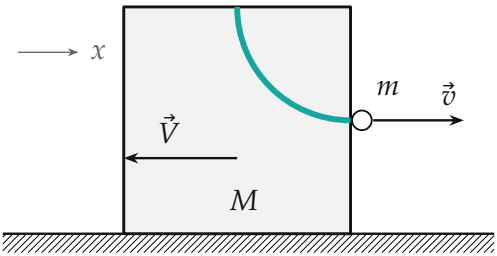
Сечение кубика через желоб (бирюзовая дуга). Центр дуги — середина верхнего правого ребра, радиус $a/2$. Шарик входит в A, выходит в B на высоте $a/2$; относительно кубика скорость вылета $\vec{u}$ горизонтальна.

2. Направление скорости шарика при вылете. Желоб гладкий и закреплён в кубике, поэтому относительно кубика шарик движется вдоль желоба: его относительная скорость $\vec{u}$ в точке B направлена по касательной, горизонтально вправо. Кубик стоит на столе и движется только горизонтально. По закону сложения скоростей скорость шарика относительно стола $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$ — сумма двух горизонтальных векторов, тоже горизонтальна. Это и позволяет обойтись двумя законами сохранения: у шарика в момент вылета нет вертикальной скорости.

3. Закон сохранения горизонтального импульса системы «шарик + кубик». Сначала всё покоится. Горизонтальных внешних сил нет, поэтому в проекции на ось x

$$mv_x + MV_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_x = -\frac{m}{M}\,v_x = -k\,v_x.$$

Знак минус: кубик едет влево, когда шарик вылетает вправо. Дальше — модули: $V = kv$.



Момент вылета: шарик летит вправо со скоростью v, кубик едет влево со скоростью V. Длины стрелок — по найденным значениям ($v = 0{,}6$ м/с, $V = 0{,}75$ м/с).

4. Закон сохранения механической энергии системы. Трения нет, стол гладкий и неподвижен, сила его реакции перпендикулярна движению кубика и работы не совершает; сила давления желоба на шарик и шарика на кубик — пара внутренних сил гладкого контакта, их суммарная работа равна нулю. Значит, убыль потенциальной энергии шарика переходит в кинетические энергии обоих тел:

$$mg\,\frac{a}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

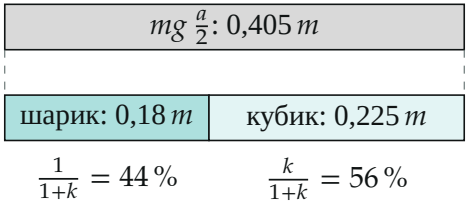
5. Решаем. Подставим $V = kv$, $M = m/k$:

$$mg\,\frac{a}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m}{k}\cdot\frac{k^2v^2}{2} = \frac{mv^2}{2}(1+k) \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{ga}{1+k}},$$

$$V = kv = \frac{k}{\sqrt{1+k}}\sqrt{ga}.$$

Числа: $ga = 10\cdot 0{,}081 = 0{,}81$ м^2/с^2, $\sqrt{ga} = 0{,}9$ м/с, $\sqrt{1+k} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$:

$$v = \frac{0{,}9}{1{,}5} = 0{,}6 \text{ м/с}, \qquad V = \frac{1{,}25\cdot 0{,}9}{1{,}5} = 0{,}75 \text{ м/с}.$$



Баланс энергии (в джоулях на килограмм массы шарика): потенциальная энергия $mga/2$ делится между шариком и кубиком в отношении $1 : k$. Тяжёлому шарику кубик «отнимает» больше половины.

Обратите внимание. Нельзя считать, что шарик набирает $\sqrt{ga}$, как с неподвижного желоба: кубик откатывается и забирает часть энергии. И нельзя приравнивать скорость шарика относительно кубика u к его скорости v относительно стола: $u = v + V = 1{,}35$ м/с, а в законы сохранения входит v.

Проверка. Размерность: $[\sqrt{ga}] = \sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = $ м/с, k безразмерно. Пределы: при $k \to 0$ (шарик лёгкий) $V \to 0$ — кубик не шелохнётся; при $k \to \infty$ (кубик лёгкий) $V = \sqrt{ga}\,k/\sqrt{1+k}$ растёт без ограничения — лёгкий кубик отлетает быстро, а шарик почти не разгоняется ($v \to 0$). Подстановка обратно (при $m = 1{,}25$ кг, $M = 1$ кг): импульсы $mv = 1{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}75$ и $MV = 1 \cdot 0{,}75 = 0{,}75$ кг·м/с равны и противоположны; кинетические энергии $\frac{1{,}25 \cdot 0{,}6^2}{2} + \frac{1 \cdot 0{,}75^2}{2} = 0{,}225 + 0{,}281 = 0{,}506$ Дж, а $mg\frac{a}{2} = 1{,}25 \cdot 10 \cdot 0{,}0405 = 0{,}506$ Дж — верно.

Ответ. $V = \dfrac{k}{\sqrt{1+k}}\sqrt{ga} = 0{,}75$ м/с.