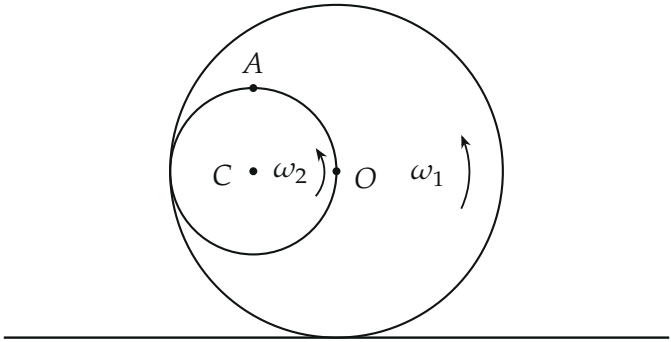
Колесо в колесе

Задача 3. [Курчатов 2025/26, 9 класс, задача 3] Большое колесо радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. По внутренней поверхности большого колеса без проскальзывания движется малое колесо радиуса $r = R/2$. Конфигурация колёс в некоторый момент времени показана на рисунке. В этот момент времени: большое колесо вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω_1 относительно его центра в точке O, малое колесо вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_2 = 14\,\omega_1$ относительно его центра в точке C, центры колёс лежат на горизонтальной прямой. Найдите отношение модуля скорости наивысшей точки малого колеса A в лабораторной системе отсчёта к скорости движения центра большого колеса в лабораторной системе отсчёта в положении колёс в указанный момент времени.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику твёрдого тела. Скорость любой точки колеса — скорость какой-то известной его точки плюс скорость вращения вокруг неё: $\vec{v}_X = \vec{v}_Y + \vec{v}_{\text{вр}}$, где $\vec{v}_{\text{вр}}$ перпендикулярна отрезку YX и по модулю равна $\omega \cdot YX$. Связь между колёсами даёт условие «без проскальзывания»: в точке касания P колёс скорости точек обоих колёс одинаковы. Поэтому идём цепочкой: стол → центр O → точка P большого колеса = точка P малого → точка A.

Обозначения. Оси: x вправо, y вверх. K — точка касания большого колеса со столом; P — точка касания колёс (крайняя левая точка большого колеса: малое колесо касается его изнутри, $OC = R - r = R/2$,

C левее O). Векторы: $\overrightarrow{OP} = (-R;0)$, $\overrightarrow{PA} = (r;r) = (\frac{R}{2};\frac{R}{2})$. Вращение против часовой стрелки поворачивает радиус-вектор $(X;Y)$ в скорость $\omega(-Y;X)$.

1. Скорость центра большого колеса. Качение без проскальзывания: точка K колеса покоится. Скорость O — скорость K плюс вращение вокруг K: $\overrightarrow{KO} = (0;R)$, $\vec{v}_O = \omega_1(-R;0)$. Центр движется влево со скоростью

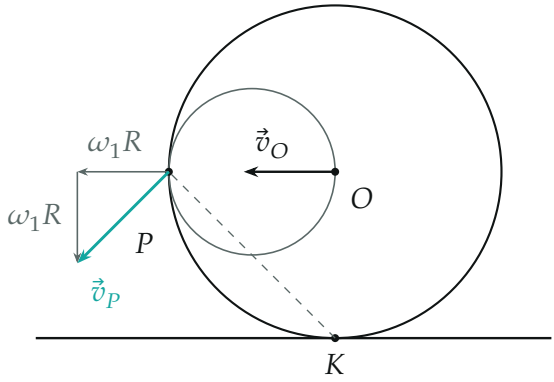
$$v_O = \omega_1 R.$$

Знак: вращение против часовой стрелки при качении по полу — это качение влево.

2. Скорость точки P большого колеса. Скорость центра плюс вращение вокруг центра:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \omega_1\,(0;-R) = (-\omega_1 R;\,-\omega_1 R)\,, \qquad v_P = \sqrt{2}\,\omega_1 R.$$

Проверка через мгновенный центр: $\overrightarrow{KP} = (-R;R)$, вращение вокруг K даёт $\omega_1(-R;-R)$ — то же самое.



Большое колесо. Центр O едет влево со скоростью $\omega_1 R$. Скорость точки P (бирюзовая) — сумма $\vec{v}_O$ (влево) и скорости вращения вокруг O (вниз); она перпендикулярна KP (штрих), как и положено при вращении вокруг мгновенного центра K.

3. Без проскальзывания колёс. Точки касания малого и большого колёс в этот момент имеют одинаковую скорость (иначе одно колесо

скользило бы по другому):

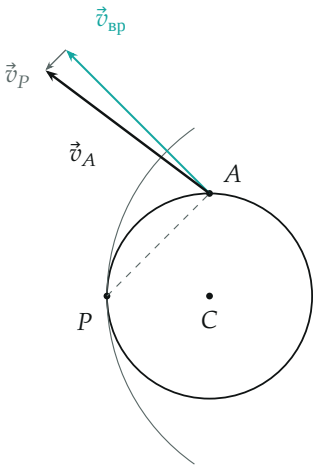
$$\vec{v}_P^{\,\text{мал}} = \vec{v}_P = (-\omega_1 R;\ -\omega_1 R)\,.$$

4. Скорость точки A. Малое колесо — твёрдое тело, вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω_2. Скорость A — скорость P плюс вращение вокруг P по вектору $\overrightarrow{PA} = (\frac{R}{2}; \frac{R}{2})$:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \omega_2 \left(-\tfrac{R}{2};\ \tfrac{R}{2}\right) = \left(-\omega_1 R - \tfrac{\omega_2 R}{2};\ -\omega_1 R + \tfrac{\omega_2 R}{2}\right).$$

При $\omega_2 = 14\,\omega_1$: вращательная часть $\omega_1 R\,(-7;7)$, и

$$\vec{v}_A = \omega_1 R\,(-1-7;\ -1+7) = \omega_1 R\,(-8;\ 6).$$



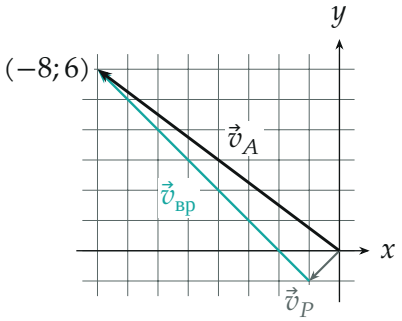
Малое колесо. Скорость вращения вокруг P (бирюзовая, $7\sqrt{2}\,\omega_1 R$) перпендикулярна PA (штрих); к ней добавляется маленькая $\vec{v}_P$ (серая). Сумма — $\vec{v}_A$. Масштаб скоростей общий: $\omega_1 R$ соответствует 0,32 см.

5. Модуль и отношение. По теореме Пифагора

$$v_A = \omega_1 R\sqrt{8^2+6^2} = 10\,\omega_1 R, \qquad \frac{v_A}{v_O} = \frac{10\,\omega_1 R}{\omega_1 R} = 10.$$

В общем виде:

$$\frac{v_A}{v_O} = \sqrt{\left(1 + \frac{\omega_2}{2\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{2\omega_1} - 1\right)^2} = \sqrt{2 + \frac{\omega_2^2}{2\omega_1^2}} = \sqrt{2 + 98} = 10.$$



Сложение скоростей точки A в клетках $\omega_1 R$: $\vec{v}_P = (-1;-1)$, $\vec{v}_{вр} = (-7;7)$, сумма $(-8;6)$ — египетский треугольник с гипотенузой 10.

Обратите внимание. Угловая скорость ω_2 дана относительно центра C в лабораторной системе (обычная угловая скорость тела), поэтому вращение малого колеса вокруг P идёт с той же ω_2. Скорость точки P малого колеса — не ноль: ноль она была бы, только если бы большое колесо стояло.

Проверка. Размерность: $[\omega R]$ = м/с, отношение безразмерно. Второй способ — через центр C: $\overrightarrow{PC} = (\frac{R}{2};0)$, $\vec{v}_C = \vec{v}_P + \omega_2(0;\frac{R}{2}) = \omega_1 R(-1;-1) + \omega_1 R(0;7) = \omega_1 R(-1;6)$; затем $\overrightarrow{CA} = (0;\frac{R}{2})$, $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \omega_2(-\frac{R}{2};0) = \omega_1 R(-8;6)$ — то же. Предел: при $\omega_2 = \omega_1$ малое колесо вращается как одно целое с большим, и формула даёт $v_A = \sqrt{2 + \frac{1}{2}}\,\omega_1 R = \frac{\sqrt{10}}{2}\,\omega_1 R$; столько же даёт вращение точки A вокруг K на расстоянии $KA = \sqrt{(\frac{R}{2})^2 + (\frac{3R}{2})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}R$. Смысл: малое колесо крутится в 14 раз быстрее большого, и почти вся скорость точки A — его собственное вращение.

Ответ. $\dfrac{v_A}{v_O} = \sqrt{2 + \dfrac{\omega_2^2}{2\omega_1^2}} = 10.$