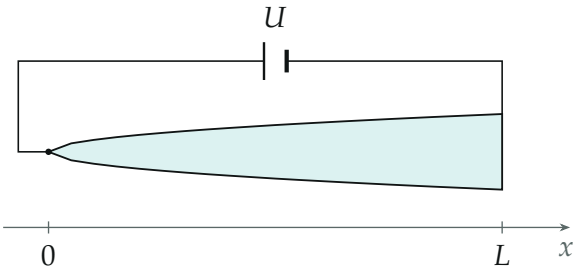
Неоднородная проволока

Задача 5. [Курчатов 2025/26, 9 класс, задача 5] Вдоль оси x расположена неоднородная по составу проволока длины L: левый конец соответствует точке $x_0 = 0$, правый — точке $x_L = L$. К концам проволоки приложено постоянное напряжение U. Радиус проволоки зависит от координаты по закону $r(x) = r_0\sqrt{\dfrac{x}{L}}$, а удельное сопротивление — по закону $\rho(x) = \rho_0 \dfrac{L}{L-x}$, $0 \le x \le L$. Координату наиболее холодной точки проволоки в установившемся режиме можно представить в виде $x_{\min} = kL$. Найдите число k.



Поясняющий рисунок: проволока утолщается слева направо ($r \propto \sqrt{x}$), к её концам приложено напряжение U.

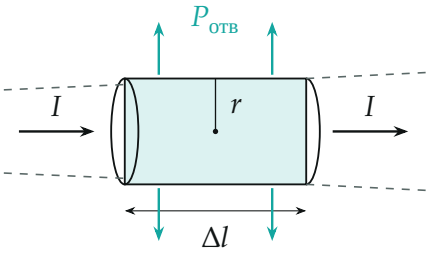
▲ **Решение. Что происходит.** По проволоке течёт один и тот же ток I (заряд нигде не копится), но каждый её кусочек выделяет свою мощность: сопротивление кусочка зависит от $\rho(x)$ и сечения. В установившемся режиме температура кусочка перестаёт меняться, когда вся выделенная в нём теплота уходит в окружающий воздух через его боковую поверхность. Значит, холоднее всего там, где меньше всего тепла приходится на единицу *боковой поверхности*. Это задача на тепловой баланс малого участка и поиск экстремума функции.

Обозначения. I — сила тока; Δl — длина малого участка около точки x; $S(x) = \pi r^2(x)$ — площадь сечения; $\Delta A = 2\pi r(x)\,\Delta l$ — боковая поверхность участка; T_0 — температура воздуха; α — коэффициент теплоотдачи (сколько ватт уходит с квадратного метра поверхности на каждый градус разности температур). Теплопроводностью вдоль самой

проволоки пренебрегаем: проволока тонкая, а участки соседних температур почти не отличаются.

1. Мощность, выделяемая на малом участке. На участке длины Δl сечение и удельное сопротивление можно считать постоянными, поэтому его сопротивление и мощность по закону Джоуля — Ленца:

$$R_{\Delta l} = \frac{\rho(x)\,\Delta l}{S(x)}, \qquad P_{\Delta l} = I^2 R_{\Delta l} = I^2\,\frac{\rho(x)}{\pi r^2(x)}\,\Delta l.$$



Малый участок проволоки около точки x: ток I проходит насквозь, выделенная теплота уходит через боковую поверхность $2\pi r\,\Delta l$.

2. Тепловой баланс участка в установившемся режиме. Температура участка $T(x)$ не меняется, значит мощность, которую он отдаёт воздуху через боковую поверхность, равна выделяемой:

$$\alpha\,(T(x)-T_0)\,2\pi r(x)\,\Delta l = I^2\,\frac{\rho(x)}{\pi r^2(x)}\,\Delta l \quad \Rightarrow \quad T(x)-T_0 = \frac{I^2}{2\pi^2\alpha}\cdot\frac{\rho(x)}{r^3(x)}.$$

Длина Δl сократилась, как и должно быть. Ток I одинаков во всех сечениях, поэтому перегрев $T - T_0$ меньше всего там, где меньше всего

$$f(x) = \frac{\rho(x)}{r^3(x)}.$$

3. Явный вид $f(x)$. Подставим законы из условия, $r^3 = r_0^3\,(x/L)^{3/2}$:

$$f(x) = \frac{\rho_0 \dfrac{L}{L-x}}{r_0^3\left(\dfrac{x}{L}\right)^{3/2}} = \frac{\rho_0 L^{5/2}}{r_0^3}\cdot\frac{1}{x^{3/2}(L-x)}.$$

Качественная картина: у левого конца проволока очень тонкая ($r \to 0$, $f \to \infty$), у правого бесконечно растёт ρ ($f \to \infty$). Значит, где-то между концами есть самая холодная точка. Минимум f — там, где максимальна функция

$$\varphi(x) = x^{3/2}(L-x), \qquad 0 < x < L.$$

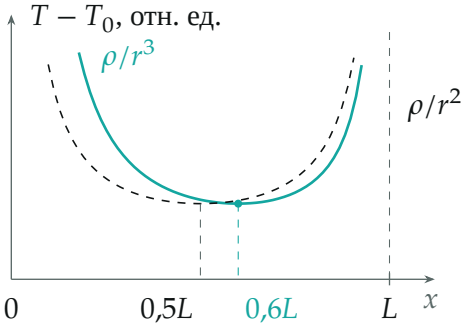
4. Максимум $\varphi(x)$. Производная:

$$\varphi'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}(L-x) - x^{3/2} = x^{1/2}\left(\frac{3}{2}L - \frac{5}{2}x\right).$$

Она положительна при $x < \frac{3}{5}L$ и отрицательна при $x > \frac{3}{5}L$, поэтому максимум φ (и минимум температуры) — в точке

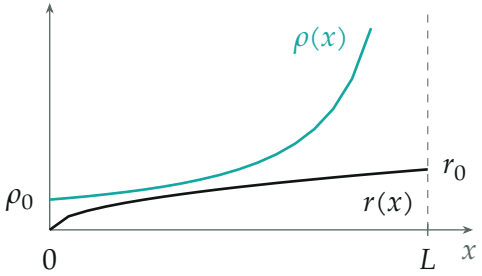
$$x_{\min} = \frac{3}{5}L, \qquad k = 0{,}6.$$

Второй способ (без производной). Запишем $\varphi^2 = x^3(L-x)^2$ как $(\frac{x}{3})^3(\frac{L-x}{2})^2\cdot 3^3\cdot 2^2$. Сумма пяти множителей $3\cdot\frac{x}{3} + 2\cdot\frac{L-x}{2} = L$ постоянна, а произведение чисел с постоянной суммой максимально, когда они равны: $\frac{x}{3} = \frac{L-x}{2}$, откуда снова $x = \frac{3}{5}L$.



Перегрев по длине проволоки (бирюзовая кривая, по вычисленным точкам, минимум принят за 1) — наименьший в точке $0{,}6L$. Пунктир — мощность на единицу длины ρ/r^2, у неё минимум в $0{,}5L$.

Обратите внимание: сравнивать нужно не мощность на единицу длины ($\propto \rho/r^2$), а мощность на единицу поверхности, через которую тепло уходит ($\propto \rho/r^3$). Толстый участок выделяет на метр длины столько же, сколько тонкий, но отдаёт тепло с большей площади — и потому холоднее. У организаторов сравнивается мощность на единицу длины, $\rho/S \propto 1/(x(L-x))$, и получается $k = 0{,}5$; это верно, только если теплоотвод с метра проволоки не зависит от её толщины, а для проволоки, остывающей с поверхности, это не так.



Почему у минимума две причины: слева мал радиус r (чёрная кривая), справа растёт удельное сопротивление ρ (бирюзовая). Масштабы по вертикали у кривых разные.

Соберём ответ. $T - T_0 \propto \rho/r^3 \propto \dfrac{1}{x^{3/2}(L-x)}$, минимум при $x_{\min} = \dfrac{3}{5}L$, то есть $k = 0{,}6$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{I^2\rho}{\alpha r^3}$ — это $\dfrac{\text{А}^2\cdot\text{Ом}\cdot\text{м}}{\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})\cdot\text{м}^3} = \text{К}$. Численно: на сетке из 10^5 точек минимум $1/(x^{3/2}(1-x))$ находится при $x = 0{,}6000$. Предел: если бы радиус был постоянным, перегрев шёл бы как $\rho(x)$ и был бы наименьшим на левом конце; утоньшение проволоки слева сдвигает холодную точку внутрь.

Физический смысл: самое холодное место — компромисс между тонкой частью слева, где тепло уходит с малой поверхности, и плохо проводящей частью справа, где тепла выделяется много.

Ответ. $k = 0{,}6$ (перегрев $\propto \rho/r^3 \propto 1/(x^{3/2}(L-x))$, минимум при $x = \frac{3}{5}L$). Если считать теплоотвод с метра проволоки не зависящим от её толщины, как у организаторов, получается $k = 0{,}5$.