Монета в чаше на столе

Задача 1. [МОШ 2009/10, 10 класс, задача 1] На гладком горизонтальном столе находится чаша массой M с полусферической выемкой радиусом R с гладкими стенками (смотри рисунок). На самый край выемки чаши поместили монету массой m, размеры которой значительно меньше размеров выемки. В начальный момент монета и чаша друг относительно друга не двигались. Монету и чашу одновременно отпустили. С каким ускорением движется монета, проходя самое нижнее положение?

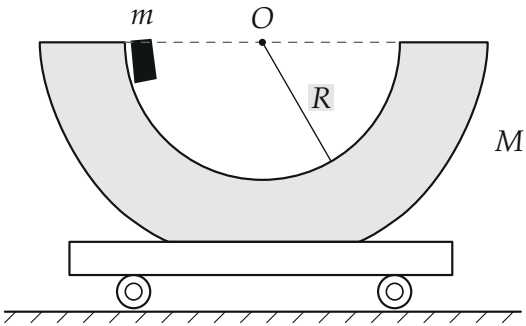


Рис. 1. Чаша и монета на краю выемки (рисунок условия; подписи добавлены)

▲ **Решение. Что происходит.** Монета соскальзывает по гладкой стенке выемки вниз, а чаша, которую монета при этом отталкивает, уезжает по столу в противоположную сторону. Внешних горизонтальных сил на систему «чаша + монета» нет (стол и стенки гладкие), и трения нет, поэтому сохраняются горизонтальная проекция импульса и полная механическая энергия. Ускорение монеты нельзя получить из v^2/R со скоростью относительно стола: относительно стола траектория монеты не окружность. Но в нижней точке чаша не ускоряется по горизонтали (ниже это показано), и в этот момент её система отсчёта инерциальна, а в ней монета движется по окружности радиуса R.

Обозначения. Ось x направлена горизонтально вправо, монета начинала у левого края. В нижней точке: v — скорость монеты относительно стола (вправо), V — модуль скорости чаши относительно стола (влево),

u — скорость монеты относительно чаши, a — искомое ускорение монеты.

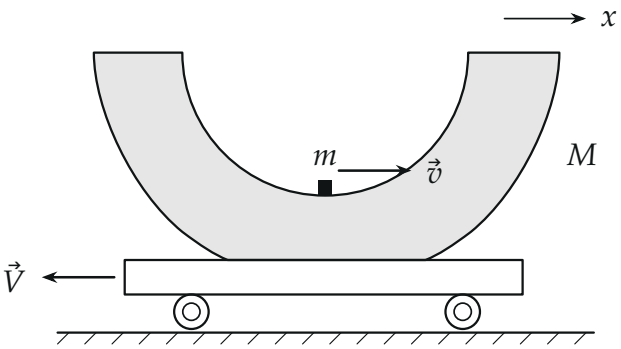


Рис. 2. Нижнее положение: скорость монеты $\vec{v}$ вправо и скорость чаши $\vec{V}$ влево относительно стола

1. Закон сохранения горизонтального импульса. Система «чаша + монета» в горизонтальном направлении замкнута: сила тяжести и реакция стола вертикальны, а силы между монетой и чашей внутренние. В начале всё покоилось, импульс по оси x был равен нулю, значит и в нижней точке

$$m\,v - M\,V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M}\,v.$$

2. Закон сохранения энергии. Стенки и стол гладкие, трения нет, остальные силы (тяжесть и реакция стола) работы не совершают на горизонтальном пути чаши, а силы между монетой и чашей лишь передают энергию от одного тела другому. Потенциальная энергия монеты уменьшилась на mgR (она опустилась с края на высоту R), центр чаши по высоте не двигался:

$$mgR = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Отсюда

$$v^2 = \frac{2gR\,M}{M+m}.$$

3. Скорость монеты относительно чаши. Монета и чаша движутся

навстречу друг другу, скорости складываются:

$$u = v + V = v\left(1 + \frac{m}{M}\right) = v\,\frac{M+m}{M},$$

$$u^2 = v^2\frac{(M+m)^2}{M^2} = \frac{2gR\,(M+m)}{M}.$$

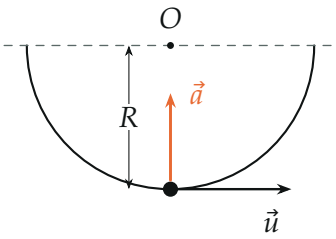


Рис. 3. В системе отсчёта чаши монета в нижней точке движется по окружности радиуса R со скоростью $\vec{u}$; ускорение направлено к центру O

4. Чаша в нижней точке не ускоряется по горизонтали. В нижней точке нормаль к стенке вертикальна, поэтому сила, с которой монета давит на чашу, направлена вертикально. Сила тяжести чаши и реакция стола тоже вертикальны. Горизонтальных сил на чашу нет, и её горизонтальное ускорение в этот момент равно нулю; по вертикали чаша не движется. Поэтому в этот момент ускорение чаши $\vec{a}_0 = 0$ и система отсчёта чаши инерциальна.

5. Ускорение монеты. Ускорение тела в двух системах отсчёта отличается на ускорение одной системы относительно другой; здесь оно нулевое, значит $\vec{a}$ монеты относительно стола равно её ускорению относительно чаши. А относительно чаши монета в нижней точке движется по окружности радиуса R со скоростью u, и её ускорение — центростремительное:

$$a = \frac{u^2}{R} = \frac{2g\,(M+m)}{M} = 2g\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Центр окружности O лежит выше нижней точки, поэтому ускорение направлено вертикально вверх.

Обратите внимание. Формула $a = v^2/R$ со скоростью v относительно стола здесь неверна: относительно стола путь монеты не окружность радиуса R, а её радиус кривизны другой. Окружностью путь становится только в системе отсчёта чаши, а переходить в неё можно потому, что в нижней точке чаша не ускоряется.

Проверка. Размерность: $g(M + m)/M$ — ускорение. Предел $M \to \infty$ (чаша неподвижна): $a \to 2g$, это известное значение для шарика на неподвижной полусфере: $v^2 = 2gR$, $a = v^2/R = 2g$. При конечной массе чаши ускорение больше $2g$: чаша уходит назад, относительная скорость u больше, чем v. Заодно сила, давящая на монету, в нижней точке $N = m(g + a) = mg\,(3 + 2m/M)$.

Ответ. $a = \dfrac{2g\,(M + m)}{M}$, ускорение направлено вертикально вверх.