Муравей и проволочный мостик

Задача 2. [МОШ 2009/10, 10 класс, задача 2] В горизонтальной крышке стола пропилена полуцилиндрическая канавка радиусом $R = 20$ см. Ось канавки совпадает с верхней плоскостью крышки стола. На краю канавки сидит муравей, который хочет перебраться через нее. Школьник решил помочь муравью, сделав мостик из прямых отрезков проволоки. Но все куски проволоки, которые были в распоряжении школьника, имели длину $L = 38$ см. Тогда школьник сделал мостик из двух проволок, расположив их так, как показано на рисунке, причем точку A, в которой концы проволок воткнуты в дно канавки, он выбрал случайным образом. Муравей может ползти вверх по проволоке с постоянной скоростью $V = 0{,}5$ см/с, а вниз — с постоянной скоростью $2V = 1$ см/с. Найдите максимальное время и минимальное время, за которое муравей сможет перебраться через канавку по такому мостику.

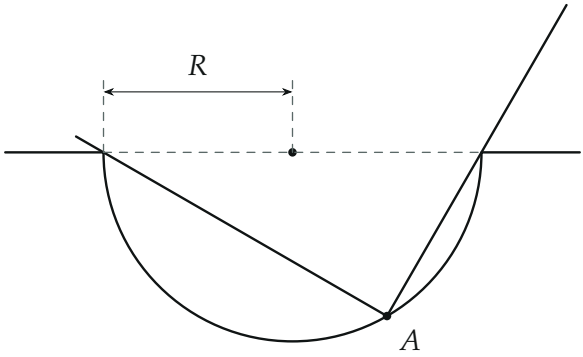


Рис. 1. Канавка и мостик из двух проволок длиной L, воткнутых в точку A дна; концы проволок лежат на краях канавки или выступают за них

▲ **Решение.** **Что происходит.** Муравей идёт по двум хордам окружности: сначала спускается по одной проволоке к точке A (быстро, со скоростью $2V$), затем поднимается по другой на противоположный край (медленно, со скоростью V). Выступающие за край куски проволок ему не нужны. Положение точки A на дне задаёт длины хорд, а значит и время; нужно найти наибольшее и наименьшее время по всем допустимым

положениям A. Допустимость ограничена длиной проволоки: хорда не может быть длиннее L.

Обозначения. P и Q — края канавки (концы диаметра), O — центр. Угол $\theta = \angle APQ$ — угол, под которым первая хорда PA уходит вниз от плоскости стола. $a = PA$ и $b = AQ$ — длины хорд, t — время перехода от P к Q. Муравей стартует с края P.

1. Хорды как катеты. Угол PAQ вписанный и опирается на диаметр PQ, поэтому он прямой (рис. 2). В прямоугольном треугольнике PAQ с гипотенузой $PQ = 2R$ и углом θ при вершине P

$$a = 2R\cos\theta, \qquad b = 2R\sin\theta, \qquad a^2 + b^2 = (2R)^2.$$

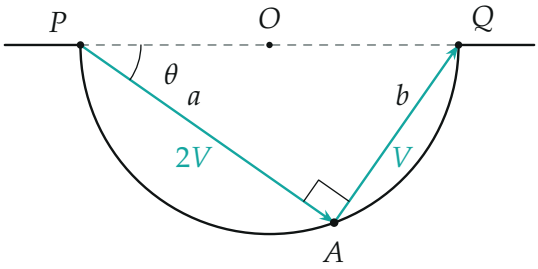


Рис. 2. Муравей идёт по хордам PA (вниз, $2V$) и AQ (вверх, V); треугольник PAQ прямоугольный

2. Время перехода. Спуск по PA идёт со скоростью $2V$, подъём по AQ — со скоростью V:

$$t = \frac{a}{2V} + \frac{b}{V} = \frac{R}{V}(\cos\theta + 2\sin\theta) = \frac{R}{V} f(\theta).$$

Всё сводится к функции $f(\theta) = \cos\theta + 2\sin\theta$.

3. Какие θ допустимы. Хорда не длиннее проволоки: $a \le L$ и $b \le L$, то есть

$$\cos\theta \le \frac{L}{2R} = 0{,}95, \qquad \sin\theta \le 0{,}95.$$

Отсюда $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, где $\theta_1 = \arccos 0{,}95 \approx 18{,}2°$, $\theta_2 = \arcsin 0{,}95 \approx 71{,}8°$. При $\theta < \theta_1$ хорда PA длиннее проволоки, при $\theta > \theta_2$ — хорда AQ.

4. Максимальное время. Запишем f как одну косинусоиду: $\cos\theta + 2\sin\theta = \sqrt{5}\cos(\theta - \theta_*)$, где $\tan\theta_* = 2$, $\theta_* \approx 63{,}4°$. Это число лежит внутри допустимого отрезка $[\theta_1; \theta_2]$, поэтому наибольшее значение $\sqrt{5}$ достигается (рис. 3), и

$$t_{\max} = \frac{R\sqrt{5}}{V} = \frac{20 \cdot 2{,}236}{0{,}5} \approx 89.$$

Здесь R в сантиметрах, V в сантиметрах в секунду, время получается в секундах: около 90 с. Это положение A с $b = 2a$ (катет, по которому муравей поднимается, вдвое длиннее): $b \approx 35{,}8$ см, $a \approx 17{,}9$ см; обе хорды короче L.

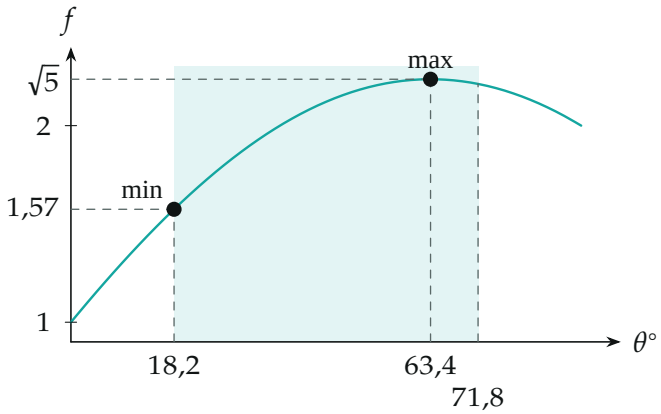


Рис. 3. Функция $f(\theta) = \cos\theta + 2\sin\theta$; закрашен допустимый отрезок $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$

5. Минимальное время. На допустимом отрезке функция $\sqrt{5}\cos(\theta - \theta_*)$ вогнута (её график — дуга, выпуклая вверх), поэтому наименьшее значение — на одном из концов отрезка:

$$f(\theta_1) = 0{,}95 + 2\sqrt{1 - 0{,}95^2} = \frac{19 + 2\sqrt{39}}{20} \approx 1{,}575,$$

$$f(\theta_2) = \sqrt{1 - 0{,}95^2} + 2 \cdot 0{,}95 = \frac{\sqrt{39} + 38}{20} \approx 2{,}212.$$

Меньше значение при θ_1, то есть когда спуск по PA имеет наибольшую допустимую длину $a = L = 38$ см, а подъём по AQ короткий ($b \approx 12{,}5$ см):

$$t_{\min} = \frac{R}{V} \cdot \frac{19 + 2\sqrt{39}}{20} = \frac{R}{20V}\,(19 + 2\sqrt{39}) \approx 63.$$

Обратите внимание. Минимум здесь не во «внутренней» точке, а на границе допустимой области, она появилась из-за длины проволоки L. Без ограничения $a \le L$ можно было бы взять $\theta \to 0$ ($a \to 2R$, $b \to 0$) и получить $t = R/V = 40$ с, но проволока длиной 38 см этого не допускает. Если муравей стартует с другого края, углы θ и $90^\circ - \theta$ меняются ролями, а допустимый отрезок симметричен, поэтому числа те же.

Проверка. Размерность: R/V — время. Крайние допустимые положения: $f(\theta_1) \approx 1{,}575 < f(\theta_2) \approx 2{,}212 < \sqrt{5} \approx 2{,}236$ — порядок верный (максимум внутри отрезка, минимум на ближнем к нулю конце). Второй способ для минимума — прямо по длинам: $a = L = 38$ см, $b = \sqrt{(2R)^2 - L^2} = \sqrt{40^2 - 38^2} \approx 12{,}49$ см, $t = \dfrac{38}{1} + \dfrac{12{,}49}{0{,}5} \approx 63$ с, то же число.

Ответ. $t_{\max} = \dfrac{R\sqrt{5}}{V} \approx 90$ с; $\quad t_{\min} = \dfrac{R}{20V}\left(19 + 2\sqrt{39}\right) \approx 63$ с.