Газ в сосуде с подвижным поршнем

Задача 3. [МОШ 2009/10, 10 класс, задача 3] Горизонтальный сосуд с газом разделен на две части подвижным вертикальным поршнем, не проводящим тепло. Вначале давление в сосуде было равно p_0, а температура T_0. Нагревая газ в левой части сосуда до температуры $T_0 + \Delta T$, исследуют зависимость давления в системе p от параметра $x = \Delta T/T_0$. Эта зависимость оказалась линейной: $p = p_0(1 + \alpha x)$ с параметром $\alpha = 0{,}5$. Найдите отношение $k = \nu_1/\nu_2$ количеств газа в левой и правой частях сосуда. Температура в правой части сосуда поддерживается постоянной, трением между поршнем и стенками сосуда можно пренебречь.

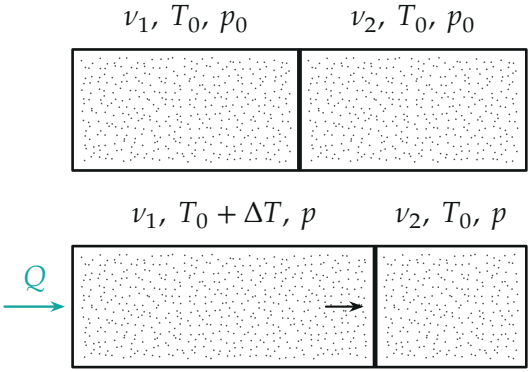


Рис. 1. Сосуд с поршнем: сверху — начальное состояние, снизу — после нагрева левой части; поршень сдвинулся вправо

▲ **Решение. Что происходит.** Поршень подвижный и без трения, поэтому он стоит там, где давления слева и справа одинаковы. Левый газ нагревают, он стремится расшириться и сдвигает поршень вправо; правый газ сжимается (его температура поддерживается неизменной), и давление в обеих частях растёт. Газ через поршень не проходит, и количества газа ν_1, ν_2 не меняются; общий объём сосуда тоже не меняется. Увидим, что наклон прямой $p(x)$ зависит только от доли газа, лежащей слева, и по нему найдём k.

Обозначения. V — полный объём сосуда, V_1, V_2 — объёмы левой и правой частей, ν_1, ν_2 — количества газа в них, R — газовая постоянная, $x = \Delta T/T_0$, p — давление в системе при нагреве.

1. Начальное состояние. Слева и справа температура T_0 и одинаковое давление p_0 (поршень свободен). Уравнение состояния идеального газа для каждой части: $p_0 V_1^{(0)} = \nu_1 R T_0$, $p_0 V_2^{(0)} = \nu_2 R T_0$. Складываем, учитывая $V_1^{(0)} + V_2^{(0)} = V$:

$$p_0 V = (\nu_1 + \nu_2)\, R T_0.$$

2. Состояние при нагреве. Давление в обеих частях общее, p; левая температура $T_0(1 + x)$, правая T_0. Уравнения состояния для частей:

$$p V_1 = \nu_1 R T_0 (1 + x), \qquad p V_2 = \nu_2 R T_0.$$

Складываем, ведь $V_1 + V_2 = V$ по-прежнему:

$$p V = R T_0 [\nu_1 (1 + x) + \nu_2].$$

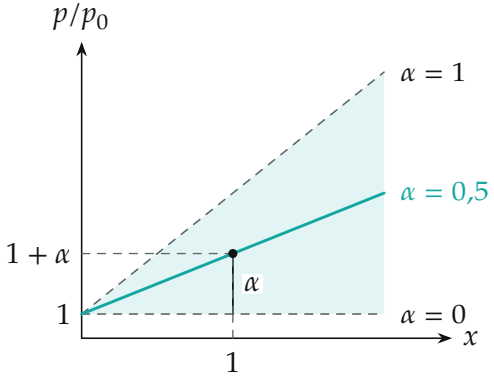


Рис. 2. Зависимость p/p_0 от x: наклон равен $\alpha = \nu_1/(\nu_1 + \nu_2)$; крайние прямые — весь газ справа ($\alpha = 0$) и весь газ слева ($\alpha = 1$)

3. Делим на начальное состояние. Объём V и RT_0 сокращаются:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\nu_1 (1 + x) + \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = 1 + \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2}\, x.$$

Зависимость линейная — как в условии, — а её коэффициент

$$\alpha = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{k}{1+k},$$

то есть равен доле газа, находящейся в нагреваемой части.

4. Отношение количеств газа. Из $\alpha = k/(1+k)$ следует $k = \alpha/(1-\alpha)$. При $\alpha = 0{,}5$

$$k = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{0{,}5}{1-0{,}5} = 1.$$

Газа слева и справа поровну.

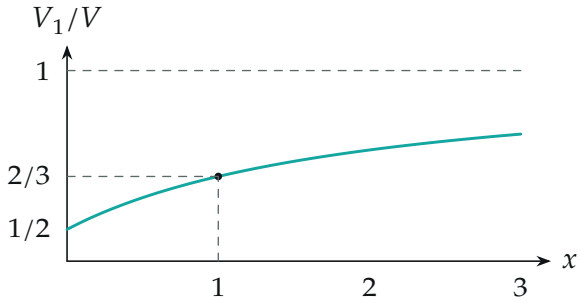


Рис. 3. Доля объёма левой части $V_1/V = (1+x)/(2+x)$ при $k = 1$: поршень от середины смещается вправо и стремится к правой стенке

Обратите внимание. Начальные объёмы частей и положение поршня в условии не заданы и не нужны: они выпали при делении. Положение поршня при нагреве: из пунктов 1 и 2 $V_1/V = k(1+x)/[k(1+x)+1]$, при $k = 1$ это $(1+x)/(2+x)$ (рис. 3). Заметьте, что поршень в начале стоит так, что давление и температура с обеих сторон равны, а потому $V_1^{(0)}/V_2^{(0)} = \nu_1/\nu_2$ — при $k = 1$ поршень был посередине.

Проверка. Безразмерные величины, размерность не нарушена. Предельные случаи: если газа справа нет ($\nu_2 \to 0$, $\alpha = 1$), греется весь газ в неизменном объёме: $p = p_0(1+x) = p_0 T/T_0$, закон Шарля; если газа нет слева ($\nu_1 \to 0$, $\alpha = 0$), давление не меняется — правый газ в неизменном объёме и при T_0. Прямая $\alpha = 0{,}5$ лежит между ними

(рис. 2). Второй способ: при $x = 1$ из решения $p = 1{,}5\,p_0$; левый объём $V_1 = \nu_1 R \cdot 2T_0/(1{,}5\,p_0) = \frac{2}{3}V$ (с учётом $p_0 V = 2\nu_1 R T_0$), правый $V_2 = \nu_2 R T_0/(1{,}5\,p_0) = \frac{1}{3}V$; сумма равна V, как и должно быть.

Ответ. $k = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} = 1$.