Три концентрические сферы с жидкостями

Задача 4. [МОШ 2009/10, 10 класс, задача 4] Имеются три концентрические хорошо проводящие металлические сферы 1, 2 и 3 радиусами R, $2R$ и $3R$. Пространство между первой и второй сферами заполнено жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением 11ρ, а между второй и третьей — жидкостью с диэлектрической проницаемостью 11ε и удельным сопротивлением ρ. Между внутренней и внешней сферами при помощи батарейки поддерживается постоянная разность потенциалов U. Чему равен заряд q_2 средней сферы? Какова сила тока I, который течет при этом в цепи?

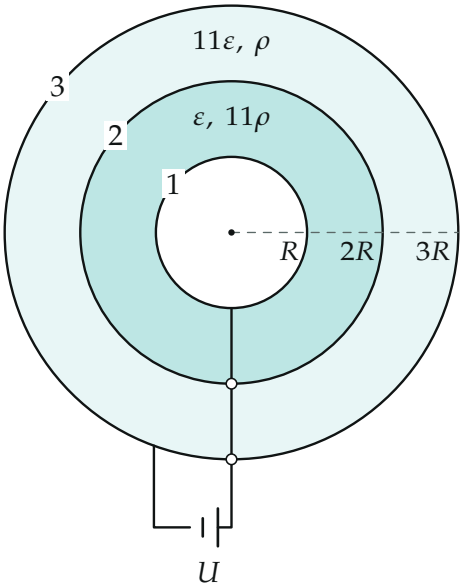


Рис. 1. Поясняющий рисунок. Разрез: три сферы и два слоя жидкости; провод к сфере 1 проходит через отверстия в сферах 2 и 3 без касания

▲ **Решение. Что происходит.** Жидкости — плохие проводники: через них идёт ток от внутренней сферы к внешней, по радиусам. Каждая сфера — проводник с одним потенциалом, поэтому слои жидкости соединены последовательно, и ток через них один и тот же. Заряд же на сфере 2

появляется, только если электрическое поле по разные стороны от неё различно: заряд на поверхности равен скачку нормальной компоненты вектора $\vec{D}$, умноженному на площадь. Поэтому сначала находим ток, затем поле, затем скачок.

Обозначения. $\rho_1 = 11\rho$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$ — у слоя между сферами 1 и 2; $\rho_2 = \rho$, $\varepsilon_2 = 11\varepsilon$ — у слоя между 2 и 3; r — расстояние от центра; j — плотность тока; ε_0 — электрическая постоянная. Течёт ток I от сферы 1 к сфере 3 (или обратно, знак тока не важен).

1. Сопротивление тонкого шарового слоя. Слой толщиной dr на расстоянии r — это «пластина» площадью $4\pi r^2$ и толщиной dr из вещества с удельным сопротивлением ρ_i, ток идёт поперёк:

$$dR = \rho_i \frac{dr}{4\pi r^2}.$$

Слои соединены последовательно, поэтому интегрируем по каждому слою:

$$R_{12} = \int_R^{2R} \frac{11\rho\, dr}{4\pi r^2} = \frac{11\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{11\rho}{8\pi R},$$

$$R_{23} = \int_{2R}^{3R} \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{\rho}{24\pi R}.$$

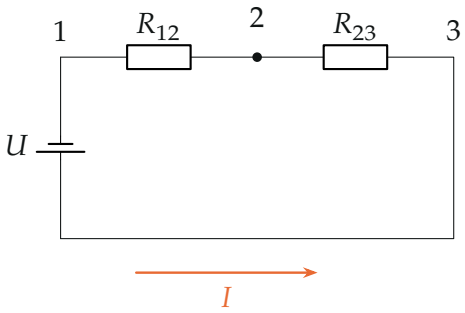


Рис. 2. Эквивалентная схема: сопротивления слоёв соединены последовательно, узел 2 — средняя сфера

2. Ток. Общее сопротивление

$$R_\Sigma = R_{12} + R_{23} = \frac{\rho}{\pi R}\left(\frac{11}{8} + \frac{1}{24}\right) = \frac{\rho}{\pi R}\cdot\frac{34}{24} = \frac{17\rho}{12\pi R},$$

$$I = \frac{U}{R_\Sigma} = \frac{12\pi R\, U}{17\rho}.$$

3. Поле в слоях. Ток через сферу радиуса r один и тот же, I, поэтому $j = I/(4\pi r^2)$ (по радиусу). Закон Ома в дифференциальной форме $E = \rho_i j$:

$$E_1(r) = \frac{11\rho I}{4\pi r^2}, \qquad E_2(r) = \frac{\rho I}{4\pi r^2}.$$

Вектор $\vec{D}$ в диэлектрике — $D = \varepsilon_0\varepsilon_i E_i$.

4. Заряд средней сферы. Возьмём тонкую «таблетку» (коробочку) Гаусса, охватывающую маленький участок поверхности сферы 2, одной крышкой в слое 1, другой — в слое 2. Внутри металла поля нет, а на поверхности металла нормальная компонента D меняется на поверхностную плотность свободных зарядов σ:

$$\sigma = D_2(2R) - D_1(2R) = \frac{\varepsilon_0 I}{4\pi(2R)^2}(\varepsilon_2\rho_2 - \varepsilon_1\rho_1)$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 I}{4\pi(2R)^2}(11\varepsilon\rho - 11\varepsilon\rho) = 0.$$

Произведения $\varepsilon_i\rho_i$ в двух жидкостях одинаковы ($11\varepsilon\rho$), значит $\vec{D}$ на сфере 2 непрерывен, $\sigma = 0$ и $q_2 = 4\pi(2R)^2\sigma = 0$.

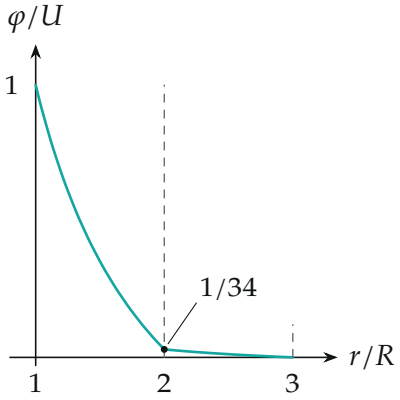


Рис. 3. Потенциал по радиусу: почти всё напряжение падает в первом слое

Обратите внимание. Заряд средней сферы не ищется через ёмкости и не зависит от U: он определяется только током и разностью $\varepsilon\rho$ слоёв. В общем случае $q_2 = \varepsilon_0 I\,(\varepsilon_2\rho_2 - \varepsilon_1\rho_1)$, и условие задачи подобрано так, что $\varepsilon \cdot 11\rho = 11\varepsilon \cdot \rho$.

Проверка. Размерность: ρ/R — сопротивление (омы), U/R_Σ — ток. Падения напряжения на слоях: $IR_{12} = \frac{33}{34}U$, $IR_{23} = \frac{1}{34}U$ — сумма равна U (рис. 3). Второй способ для тока: найдём потенциал через поле, $U = \int E\,dr = \frac{I}{4\pi}\left[11\rho\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) + \rho\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right)\right]$, что даёт тот же результат.

Ответ. $q_2 = 0, \quad I = \dfrac{12\pi R\,U}{17\rho}$.