Источник питания и лампочки

Задача 5. [МОШ 2009/10, 10 класс, задача 5] Школьник Вася присоединяет к источнику питания, схема которого изображена на рисунке, электрические лампочки. Присоединив к источнику одну электрическую лампочку, Вася обнаружил, что на ней выделяется мощность P. Присоединив к источнику четыре такие же лампочки, соединенные параллельно, Вася обнаружил, что на них вместе также выделяется мощность P. Какая мощность P_n будет выделяться на лампочках, когда Вася подсоединит к источнику питания n параллельно соединенных лампочек? Считайте, что сопротивление лампочки не зависит от силы тока.

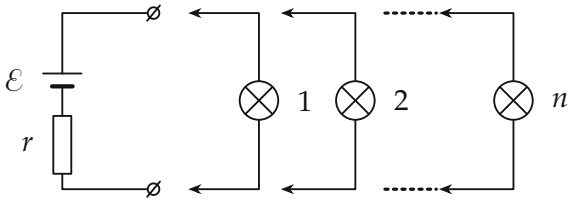


Рис. 1. Источник (батарея с резистором) и n параллельно соединённых лампочек (рисунок условия; номера ламп добавлены)

▲ **Решение. Что происходит.** Источник на схеме — батарея и последовательный с ней резистор. Для лампочек это батарея с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Параллельные лампы — одна нагрузка с общим сопротивлением R_0/n. Мощность на нагрузке R немонотонно зависит от R: при малой R мало напряжение на нагрузке, при большой — мал ток. Поэтому одна и та же мощность получается при двух разных сопротивлениях нагрузки; по условию это сопротивление одной лампы и сопротивление четырёх ламп параллельно.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС батареи, r — сопротивление резистора в источнике, R_0 — сопротивление одной лампочки, $R_n = R_0/n$ — общее сопротивление n ламп параллельно.

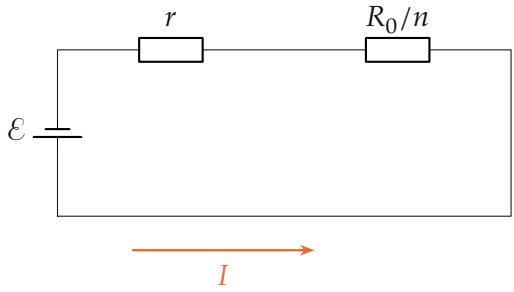


Рис. 2. Эквивалентная схема: батарея, резистор источника r и нагрузка R_0/n в одной цепи

1. Мощность на нагрузке. Закон Ома для полной цепи: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{r+R}$. Мощность на нагрузке R

$$P(R) = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2R}{(r+R)^2}.$$

2. Условие равенства мощностей. Для одной лампы $R_1 = R_0$, для четырёх $R_2 = R_0/4$; $P(R_1) = P(R_2)$:

$$\frac{R_1}{(r+R_1)^2} = \frac{R_2}{(r+R_2)^2} \;\Rightarrow\; R_1(r+R_2)^2 = R_2(r+R_1)^2.$$

Раскрываем скобки: $R_1r^2 + 2R_1R_2r + R_1R_2^2 = R_2r^2 + 2R_1R_2r + R_2R_1^2$. Средние слагаемые сокращаются, остаётся $r^2(R_1 - R_2) = R_1R_2(R_1 - R_2)$. Так как $R_1 \neq R_2$, можно сократить:

$$r^2 = R_1R_2 = R_0 \cdot \frac{R_0}{4} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{R_0}{2}.$$

3. Мощность одной лампы через P. При $r = R_0/2$

$$P = \frac{\mathcal{E}^2R_0}{(R_0/2 + R_0)^2} = \frac{4\mathcal{E}^2}{9R_0} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathcal{E}^2}{R_0} = \frac{9P}{4}.$$

4. Мощность n ламп. Нагрузка $R_n = R_0/n$:

$$P_n = \frac{\mathcal{E}^2 R_0/n}{(R_0/2 + R_0/n)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_0} \cdot \frac{1/n}{(\frac{n+2}{2n})^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_0} \cdot \frac{4n}{(n+2)^2} = \frac{9P\,n}{(n+2)^2}.$$

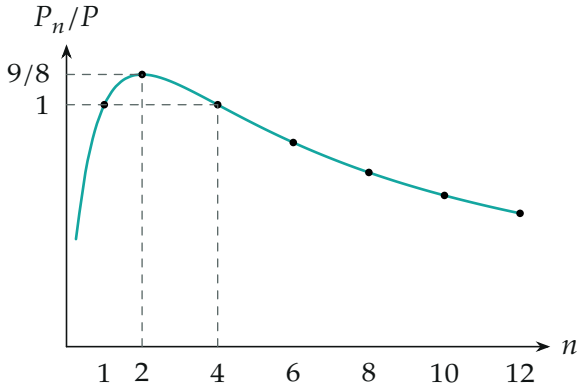


Рис. 3. Мощность на n лампах: максимум $9P/8$ при $n = 2$; точки $n = 1$ и $n = 4$ соответствуют мощности P

Обратите внимание. Сокращать на $R_1 - R_2$ можно, только отбросив тривиальный случай $R_1 = R_2$ (одинаковая нагрузка — одинаковая мощность при любых r). Нетривиальный случай даёт «правило»: при равных мощностях r^2 равно произведению двух сопротивлений нагрузки.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}^2/R_0$ — мощность. При $n = 1$ формула даёт $9P/9 = P$, при $n = 4$ — $36P/36 = P$, как в условии. Наибольшая мощность — при $n = 2$, когда нагрузка $R_0/2$ равна r: $P_{\max} = \frac{9}{8}P$, и это согласуется с теоремой о максимальной мощности (нагрузка равна внутреннему сопротивлению). При $n \to \infty$ нагрузка стремится к нулю, мощность $P_n \to 9P/n \to 0$.

Ответ. $P_n = \dfrac{9P\,n}{(n+2)^2}$.