Верёвка на колонне

Задача 6. [МОШ 2009/10, 10 класс, задача 6] Тонкую гладкую однородную веревку массой m и длиной L расстелили на горизонтальной поверхности, обернув на половину оборота вокруг вертикальной цилиндрической колонны радиусом $R \ll L$. Первоначально веревку тянули за оба конца, находившиеся на одинаковом расстоянии от колонны, с одинаковой силой $\vec{F}$, затем один из концов отпустили, продолжая действовать с той же силой на другой ее конец. В течение какого времени t после этого длина участка веревки, соприкасающегося с колонной, будет оставаться неизменной?

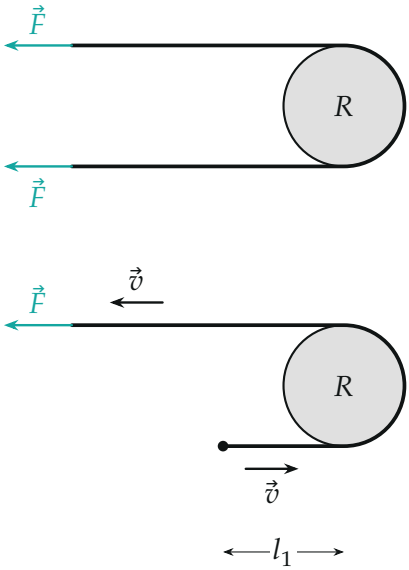


Рис. 1. Вид сверху: сверху — вначале тянут за оба конца; снизу — нижний конец отпущен, верёвка скользит по колонне против часовой стрелки (длина дуги сохраняется)

▲ **Решение. Что происходит.** Веревка гладкая, колонна гладкая, поверхность гладкая. Значит, когда конец отпущен, всё, что действует на веревку вдоль её линии, — это сила F на тянущем конце. Верёвка нерастяжима, поэтому все её точки движутся с одной скоростью вдоль её линии:

она скользит по колонне, а длина участка контакта пока не меняется. Контакт кончается, когда в самом слабо натянутом месте дуги верёвка перестаёт прижиматься к колонне: сила, прижимающая верёвку, обращается в нуль. Найдём это мгновение.

Обозначения. $\lambda = m/L$ — масса единицы длины; $T(s)$ — натяжение в точке, находящейся на расстоянии s вдоль верёвки от свободного (отпущенного) конца; a — ускорение верёвки вдоль её линии; v — скорость; x — путь, который проскользнула верёвка; $l_0 = (L - \pi R)/2$ — длина каждого прямого участка вначале; $l_1 = l_0 - x$ — длина свободного прямого участка в данный момент.

1. Натяжение и ускорение. Вдоль верёвки трения нет, поэтому для маленького кусочка длиной ds (на прямом участке и на дуге одинаково) второй закон Ньютона в проекции на линию верёвки даёт $dT = \lambda a\, ds$; здесь s растёт от свободного конца к тянущему. На свободном конце $T = 0$, поэтому

$$T(s) = \lambda a\, s.$$

На тянущем конце $s = L$ и $T = F$, откуда $a = \dfrac{F}{\lambda L} = \dfrac{F}{m}$, и

$$T(s) = F\,\frac{s}{L}.$$

Верёвка стартует из состояния покоя с постоянным ускорением $a = F/m$.

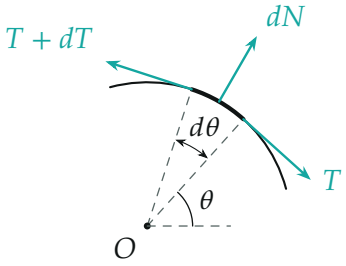


Рис. 2. Кусочек верёвки на колонне: натяжения вдоль касательных и реакция колонны наружу

2. Нормальное уравнение на дуге. Кусочек дуги соответствует малому углу $d\theta$; его длина $ds = R\,d\theta$, масса $\lambda R\,d\theta$. Он движется по окружности радиуса R со скоростью v (ускорение v^2/R), и ему нужна сила к центру, равная $\lambda v^2\,d\theta$. Два натяжения, направленные почти вдоль касательных, дают силу к центру $T\,d\theta$ (с точностью до малых второго порядка); колонна давит наружу силой dN:

$$T\,d\theta - dN = \lambda v^2\,d\theta \quad\Rightarrow\quad dN = (T - \lambda v^2)\,d\theta.$$

Веревка прижата к колонне, пока $T \geq \lambda v^2$ (давить колонна может только наружу).

3. Где это нарушится первым. Скорость везде одна, а натяжение $T(s) = Fs/L$ растёт от свободного конца. Значит, на дуге наименьшее натяжение — в её начале, где дуга смыкается со свободным прямым участком, то есть при $s = l_1$: $T_{\min} = Fl_1/L$. Там прижатие исчезнет первым.

4. Движение и момент отрыва. Верёвка прошла путь x из покоя с ускорением $a = F/m$, значит $v^2 = 2ax = 2Fx/m$ и

$$\lambda v^2 = \frac{m}{L}\cdot\frac{2Fx}{m} = \frac{2Fx}{L}.$$

Свободный участок укоротился: $l_1 = l_0 - x$. Условие $T_{\min} = \lambda v^2$:

$$\frac{F(l_0 - x)}{L} = \frac{2Fx}{L} \quad\Rightarrow\quad l_0 - x = 2x \quad\Rightarrow\quad x = \frac{l_0}{3}.$$

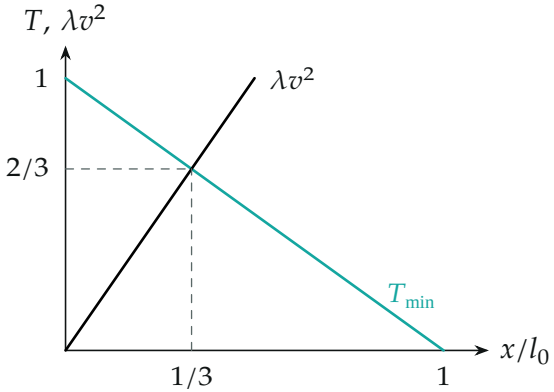


Рис. 3. Наименьшее натяжение $T_{\min}$ на дуге уменьшается, λv^2 растёт; пересечение — момент отрыва, $x = l_0/3$

5. Время. Путь при равноускоренном движении $x = at^2/2$:

$$\frac{Ft^2}{2m} = \frac{l_0}{3} \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2ml_0}{3F} = \frac{m\,(L - \pi R)}{3F},$$

$$t = \sqrt{\frac{mL}{3F}\Big(1 - \frac{\pi R}{L}\Big)} \approx \sqrt{\frac{mL}{3F}} \qquad (R \ll L).$$

Обратите внимание. Условие $R \ll L$ для этого вывода не нужно, оно лишь упрощает ответ: дуга длиной πR входит в L. Радиус R не входит в нормальное уравнение: dN записан на единицу угла, и R сокращается.

Проверка. Размерность: mL/F — (кг·м/Н = с^2). Предельный случай: при $R \to 0$ получаем $t = \sqrt{mL/(3F)}$; при $\pi R \to L$ ($l_0 \to 0$, свободного участка нет) время обращается в нуль — верёвка сразу начинает отрываться, и это естественно. Второй способ: энергия. К моменту отрыва верёвка прошла $x = l_0/3$, работа силы F равна $Fx = Fl_0/3$, и она переходит в кинетическую энергию $mv^2/2$: $v^2 = 2Fl_0/(3m)$, что совпадает с $v^2 = 2ax$ при $a = F/m$.

Ответ. $t = \sqrt{\dfrac{mL}{3F}\left(1 - \dfrac{\pi R}{L}\right)}$; при $R \ll L$ $t \approx \sqrt{\dfrac{mL}{3F}}$.