Вагонетка с грузом на вогнутом мосту

Задача 7. [МОШ 2009/10, 10 класс, задача 7] По вогнутому мосту, образующему дугу окружности радиусом R, движется вагонетка массой M. К вагонетке привязан трос длиной L, на конце которого закреплён груз массой m (см. рисунок). В момент, когда вагонетка проходила нижнюю точку моста, трос был расположен вертикально, а скорости вагонетки и груза были равны v_1 и v_2 соответственно. Найдите в этот момент силу натяжения троса T и силу N, с которой вагонетка давит на рельсы. Трос невесом и нерастяжим, трение не учитывать, размерами вагонетки и груза пренебречь.

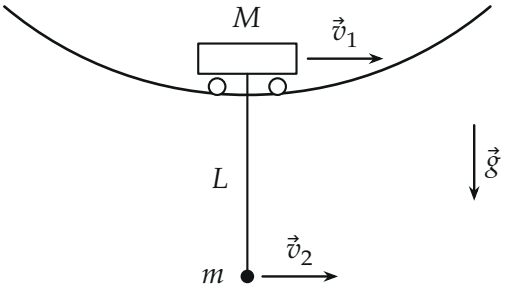


Рис. 1. Вагонетка в нижней точке моста и груз на тросе (по рисунку условия); центр дуги радиуса R лежит выше вагонетки

▲ **Решение. Что происходит.** В нижней точке моста вагонетка идёт по дуге радиуса R, и у неё есть центростремительное ускорение v_1^2/R, направленное вверх. Груз тоже ускоряется вверх, и его ускорение складывается из двух частей: ускорения вагонетки (трос привязан к ней) и ускорения самого груза относительно вагонетки. Относительно вагонетки груз движется по окружности радиуса L с центром в точке подвеса и скоростью $v_2 - v_1$, поэтому у него есть ещё относительное центростремительное ускорение $(v_2 - v_1)^2/L$. Дальше — два закона Ньютона: для груза и для вагонетки.

Обозначения. Ось y направлена вверх. a_1 — ускорение вагонетки, a_r — ускорение груза относительно вагонетки, a — ускорение груза относительно земли, $u = v_2 - v_1$ — скорость груза относительно вагонетки

в этот момент, T — натяжение троса, N — реакция рельсов на вагонетку (по третьему закону Ньютона вагонетка давит на рельсы с той же по модулю силой).

1. Ускорение вагонетки. Вагонетка движется по окружности радиуса R со скоростью v_1. В нижней точке скорость горизонтальна, а центростремительное ускорение направлено к центру дуги, вертикально вверх:

$$a_1 = \frac{v_1^2}{R}.$$

Горизонтальных сил на вагонетку нет: реакция гладкого рельса в нижней точке вертикальна, трос вертикален, трения нет. Значит, касательного ускорения у вагонетки в этот момент нет, и a_1 — её полное ускорение.

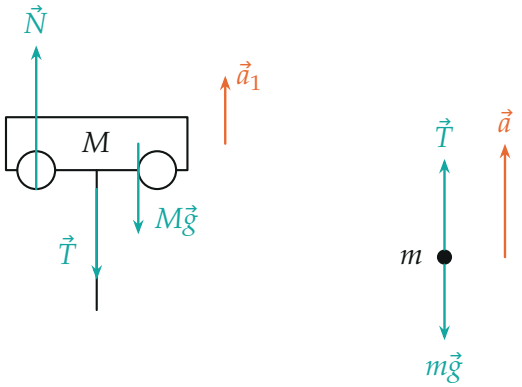


Рис. 2. Силы на вагонетку ($\vec{N}$, $M\vec{g}$, натяжение $\vec{T}$) и на груз ($\vec{T}$, $m\vec{g}$); ускорения направлены вверх

2. Ускорение груза. Перейдём в систему отсчёта, которая движется вместе с вагонеткой поступательно (она не вращается, а лишь переносится по дуге). Ускорение груза относительно земли равно сумме ускорения этой системы и ускорения груза относительно неё:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_r.$$

Относительно вагонетки груз движется по окружности радиуса L со скоростью $u = v_2 - v_1$, центр окружности (точка подвеса) выше груза, по-

этому оба ускорения направлены вверх:

$$a_r = \frac{(v_2 - v_1)^2}{L}, \qquad a = \frac{v_1^2}{R} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{L}.$$

Горизонтальной составляющей у ускорения груза нет: по горизонтали на него ничего не действует.

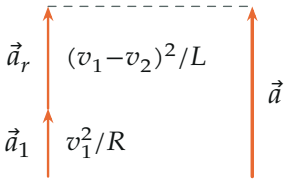


Рис. 3. Ускорение груза $\vec{a}$ — сумма ускорения вагонетки $\vec{a}_1$ и относительного ускорения $\vec{a}_r$

3. Закон Ньютона для груза. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ вниз и натяжение троса $\vec{T}$ вверх. Второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$T - mg = m\,a = m\Big(\frac{v_1^2}{R} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{L}\Big)$$

$$T = m\Big(g + \frac{v_1^2}{R} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{L}\Big).$$

4. Закон Ньютона для вагонетки. На вагонетку действуют: реакция рельсов $\vec{N}$ вверх, сила тяжести $M\vec{g}$ вниз и натяжение троса, оттягивающего вагонетку вниз с силой T (трос невесом, на груз и на вагонетку он действует с одинаковой силой). Проекция на ось y при ускорении $a_1 = v_1^2/R$:

$$N - Mg - T = M\frac{v_1^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N = M\Big(g + \frac{v_1^2}{R}\Big) + T.$$

Подставляем T:

$$N = (M + m)\Big(g + \frac{v_1^2}{R}\Big) + m\,\frac{(v_1 - v_2)^2}{L}.$$

Обратите внимание. Груз движется по окружности радиуса L только относительно вагонетки, и скорость его в этом движении — разность $v_2 - v_1$, а не v_2. Формула «ускорение груза v_2^2/L» была бы неверной: в земной системе траектория груза не окружность. Второе: вагонетка движется по дуге радиуса R, поэтому её ускорение v_1^2/R входит и в уравнение для вагонетки, и в уравнение для груза.

Проверка. Размерность: каждое слагаемое в скобках — ускорение. Предельные случаи: если $v_2 = v_1$, груз движется вместе с вагонеткой с тем же ускорением, $T = m(g + v_1^2/R)$, $N = (M + m)(g + v_1^2/R)$ — как будто груз и вагонетка один жёсткий предмет. Если $v_1 = 0$ (вагонетка стоит), $T = mg + mv_2^2/L$ — обычный маятник в нижней точке, а $N = (M + m)g + mv_2^2/L$, то есть вагонетка держит вес груза вместе с центростремительной добавкой.

Ответ. $T = m\left(g + \dfrac{v_1^2}{R} + \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{L}\right)$; $N = (M + m)\left(g + \dfrac{v_1^2}{R}\right) + m\dfrac{(v_1 - v_2)^2}{L}$.