# Кольцо и заряженная нить

**Задача 9.** [МОШ 2009/10, 10 класс, задача 9] Тонкое кольцо радиусом $R$ заряжено зарядом $Q$, равномерно распределенным по кольцу. Вдоль оси кольца расположена очень длинная нить, начинающаяся в его центре и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда $\gamma$ (см. рисунок). Найдите модуль силы электростатического взаимодействия нити с кольцом.

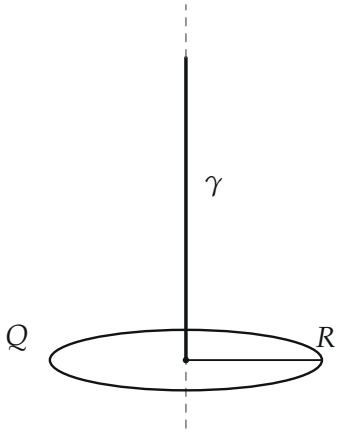



*Рис. 1. Кольцо с зарядом $Q$ и нить с линейной плотностью $\gamma$ вдоль оси, начинающаяся в центре кольца (по рисунку условия)*

▲ **Решение. Что происходит.** Нить лежит на оси кольца, начиная с центра. По третьему закону Ньютона сила, с которой нить действует на кольцо, равна по модулю силе, с которой кольцо действует на нить, а её найти проще: нужно знать электрическое поле кольца на оси и сложить силы, действующие на элементы нити. Поле на оси кольца находим суперпозицией полей маленьких зарядов кольца — вклады перпендикулярных к оси составляющих сокращаются из-за симметрии. После этого сила на нить — интеграл от $\gamma E$ вдоль оси. Если $Q$ и $\gamma$ одного знака, кольцо отталкивает нить, иначе притягивает; модуль силы один и тот же.

**Обозначения.** Ось $z$ направлена вдоль нити, начало $O$ — в центре кольца. $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. $E(z)$ — проекция поля кольца на ось в точке $P$ с

координатой $z$; $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ — расстояние от $P$ до любой точки кольца; $\alpha$ — угол между направлением на точку кольца и осью.

**1. Поле кольца на оси.** Разобьём кольцо на малые заряды $dq$ (рис. 2). Каждый создаёт в точке $P$ поле $dE = k\,dq/r^2$ вдоль прямой от него к $P$. Возьмём два диаметрально противоположных заряда: их поля одинаковы по модулю, поперечные к оси составляющие направлены противоположно и взаимно уничтожаются, а составляющие вдоль оси складываются. Поэтому остаётся $dE_z = dE\cos\alpha$, где $\cos\alpha = z/r$:

$$dE_z = \frac{k\,dq}{r^2}\cdot\frac{z}{r}.$$

Расстояние $r$ и угол $\alpha$ одинаковы для всех зарядов кольца, суммируем $dq$ и получаем $\sum dq = Q$:

$$E(z) = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

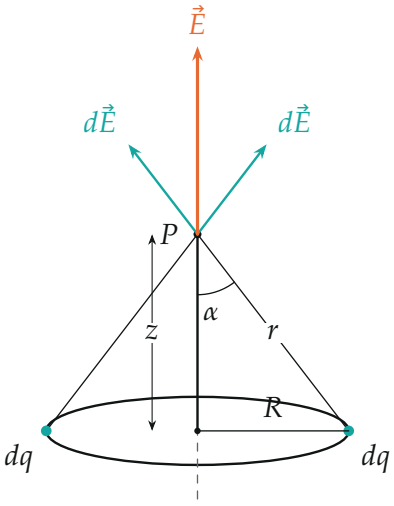



*Рис. 2. Поле кольца на оси: заряды $dq$ с противоположных концов диаметра дают $d\vec{E}$ с равными поперечными и одинаково направленными осевыми составляющими; суммарное поле $\vec{E}$ идёт вдоль оси*

**2. Сила на нить.** Элемент нити длиной $dz$ несёт заряд $\gamma\,dz$ и испытывает силу $dF = \gamma E(z)\,dz$ вдоль оси; все силы на нити направлены одинаково (вдоль оси), поэтому складываем модули. Нить идёт от $z = 0$ до бесконечности:

$$F = \int_0^\infty \gamma\,\frac{kQ\,z\,dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \gamma kQ\Big[-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\Big]_0^\infty = \gamma kQ\Big(0+\frac{1}{R}\Big) = \frac{\gamma kQ}{R}.$$

Подставив $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, получаем

$$F = \frac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

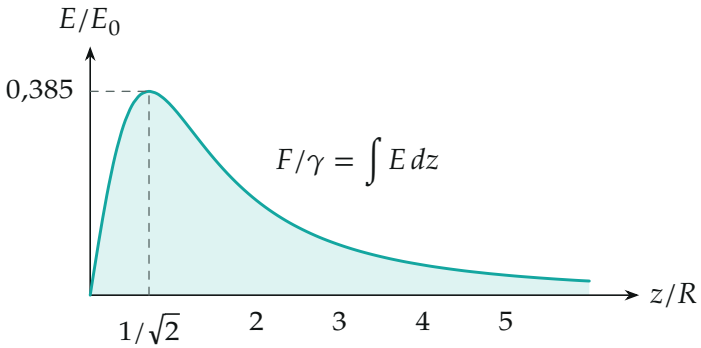



*Рис. 3. Поле кольца на оси, $E_0 = kQ/R^2$: сила на нить пропорциональна площади под графиком*

**Второй способ (через потенциал).** Потенциал кольца на оси $\varphi(z) = kQ/\sqrt{R^2+z^2}$, и $E = -d\varphi/dz$. Тогда $\int_0^\infty E\,dz = \varphi(0) - \varphi(\infty) = kQ/R$, то есть $F = \gamma kQ/R$ — тот же результат: сила на нить есть произведение $\gamma$ на разность потенциала кольца в начале нити и на бесконечности.

**Обратите внимание.** Нить бесконечная, но сила конечна: поле на оси спадает как $1/z^2$ при $z \gg R$, а в самом центре кольца $E = 0$, поэтому основной вклад даёт область $z \sim R$ (рис. 3).

**Проверка.** Размерность: заряд на единицу длины, умноженный на заряд и делённый на $\varepsilon_0 R$, — это (Кл/м) · Кл/[(Ф/м) · м], то есть Кл$^2$/(Ф ·

м) = Дж/м = Н. Если $\gamma$ и $Q$ одного знака, кольцо отталкивает нить (поле при $z > 0$ направлено вдоль $+z$), нить — кольцо; предельный переход $R \to \infty$ даёт $F \to 0$ (кольцо уходит далеко), $R \to 0$ даёт $F \to \infty$ (заряд кольца сосредоточивается у самого начала нити).

**Ответ.** $F = \dfrac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$.