Бесконечная цепь из резисторов

Задача 10. [МОШ 2009/10, 10 класс, задача 10] Найдите сопротивление между клеммами A и B бесконечной цепи, схема которой изображена на рисунке. Сопротивление каждого резистора равно R.

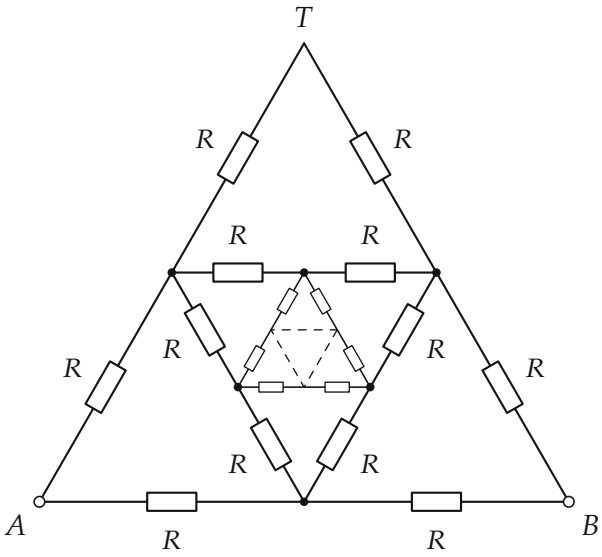


Рис. 1. Бесконечная цепь: у внешнего треугольника каждая сторона состоит из двух резисторов R, на серединах сторон — следующий треугольник, и так далее; все резисторы одинаковые, R (рисунок условия)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Цепь самоподобна: внутри треугольника с резисторами, на серединах его сторон, снова стоит такой же треугольник, и так до бесконечности. Выделим «блок» N — треугольник с тремя вершинами вместе со всем, что внутри него. Из-за трёхкратной симметрии блок, если смотреть на его три вершины, ведёт себя как звезда из трёх одинаковых сопротивлений ρ. Внутри блока лежит такой же блок N', подключённый к серединам сторон, то есть тоже звезда ρ: так получается уравнение на ρ. Искомое сопротивление между двумя вершинами внешнего треугольника, когда третья вершина T ни к чему не подключена, равно 2ρ.

Обозначения. X, Y, Z — вершины блока (в задаче A, B, T); m_{xy}, m_{yz}, m_{zx} — середины его сторон (на них внутри подключён вложенный блок); ρ — сопротивление луча звезды, заменяющей блок; O' — центр звезды, заменяющей вложенный блок.

1. Блок как звезда. Любой трёхполюсник из резисторов эквивалентен звезде из трёх сопротивлений; у блока три вершины равноправны, поэтому лучи одинаковы, ρ. Вложенный блок N' подобен блоку N, поэтому его звезда — тоже ρ, и самоподобие даёт замену внутренней части одной звездой (рис. 2).

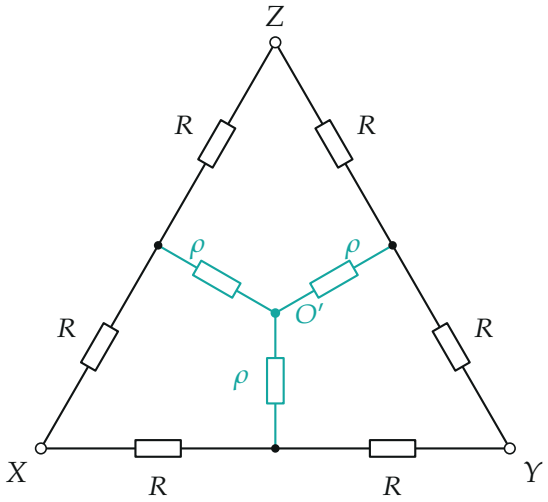


Рис. 2. Блок: треугольник из шести резисторов R и вложенный блок, заменённый звездой с лучами ρ

2. Условие самоподобия. Блок N (внешний треугольник из шести резисторов и звезда ρ внутри) по условию тоже должен быть звездой ρ. Чтобы найти ρ, измерим сопротивление блока между вершинами X и Y при свободной Z: у звезды ρ оно равно $\rho + \rho = 2\rho$. Вычислим то же самое по схеме рис. 2 и приравняем.

3. Симметрия. Подадим на X потенциал 1, на Y потенциал 0. Схема симметрична относительно оси, проходящей через Z, O' и m_{xy}, а при зеркальном отражении потенциалы $\varphi \to 1 - \varphi$. Значит, все точки на оси — m_{xy}, O' и Z — имеют потенциал $1/2$. Соединим их проводом (тока

по нему нет): тогда схема разваливается на две одинаковые половины, и сопротивление блока между X и Y — это 2 сопротивления половины $X \to$ ось.

4. Половина схемы. Из X к оси ведут два пути (рис. 3): первый — резистор R на m_{xy}, лежащий на оси; второй — резистор R на m_{zx}, а оттуда на ось идут параллельно резистор R (через вершину Z) и луч ρ (через O'). Сопротивление второго пути $R + \dfrac{R\rho}{R+\rho}$, оба пути параллельны:

$$R_h = \frac{R\left(R + \dfrac{R\rho}{R+\rho}\right)}{R + R + \dfrac{R\rho}{R+\rho}} = R\,\frac{R+2\rho}{2R+3\rho}.$$

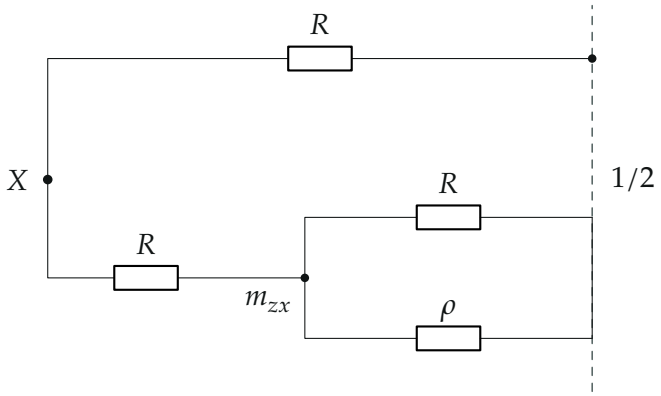


Рис. 3. Половина схемы $X \to$ ось: потенциал оси равен $1/2$; верхний путь — резистор R, нижний — R и затем $R \parallel \rho$

5. Уравнение для ρ. Между X и Y две такие половины, поэтому $2R_h = 2\rho$, то есть $R_h = \rho$:

$$\rho = R\,\frac{R+2\rho}{2R+3\rho} \quad \Rightarrow \quad 2R\rho + 3\rho^2 = R^2 + 2R\rho \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \frac{R^2}{3},$$

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

(Отрицательный корень отбрасываем.)

6. Сопротивление между A и B. Клеммы A и B — это вершины внешнего блока, вершина T свободна, поэтому

$$R_{AB} = 2\rho = \frac{2R}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15\,R.$$

Обратите внимание. Потенциал $1/2$ на оси — следствие зеркальной симметрии: клеммы подключены к X и Y, а Z свободна. Без симметрии точки Z, O', m_{xy} соединять нельзя. Вершина Z (в задаче T) к клеммам не подключена, но ток через неё идёт: из m_{zx} в m_{yz} через два резистора, и именно поэтому половина схемы получилась с $R \parallel \rho$.

Проверка. Размерность — сопротивление. Второй способ — прямой расчёт по законам Кирхгофа для блока X, Y (Z свободна): при потенциалах $\varphi_X = 1$, $\varphi_Y = 0$ получаем $R_{XY} = R\dfrac{4\rho + 2R}{3\rho + 2R}$; при $\rho = R/\sqrt{3}$ это $2R/\sqrt{3} = 2\rho$ — согласуется. Третий способ — числом: если оборвать цепь после n-го треугольника (замкнуть последний резисторами R в треугольник), то получается $R_{AB} = 1{,}111R$ ($n = 1$), $1{,}152R$ ($n = 2$), $1{,}1545R$ ($n = 3$), и дальше сходится к $1{,}1547R = 2R/\sqrt{3}$.

Ответ. $R_{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,R \approx 1{,}15\,R.$