Муравьишка на кирпиче (11 класс)

Задача 1. [МОШ 2009/10, 11 класс, задача 1] Кирпич с размерами $a \times a \times a\sqrt{11}$ поставили на квадратную грань так, что его длинные ребра оказались вертикальными. На одном из верхних углов кирпича находится Муравьишка, который может ползать по вертикальным граням кирпича со скоростью v, а по горизонтальной грани — с некоторой другой постоянной скоростью. Вдоль ребер кирпича он ползать не умеет, но может их пересекать. Муравьишка переполз на максимально удаленный от него угол кирпича. При этом он пересекал одно из ребер кирпича только один раз и строго посередине, а время, которое он затратил на путешествие, оказалось минимально возможным. Чему равно время t его путешествия? С какой скоростью u Муравьишка может ползать по горизонтальной грани кирпича?

▲ **Решение. Что происходит.** Муравьишка движется по поверхности с постоянной скоростью на каждой грани, а время нужно сделать наименьшим. Это та же задача, что и ход светового луча через границу двух сред: на каждой грани путь — прямая (в развёртке), а на ребре он ломается так, чтобы суммарное время было минимальным. Условие «ребро пересечено ровно посередине» превращается в уравнение на u: положение точки на ребре известно, а минимальность времени в этой точке даёт закон, аналогичный закону преломления.

Обозначения. A — верхний угол, где стоит Муравьишка; C — самый далёкий от него угол (противоположный по диагонали кирпича, на нижней грани); $h = a\sqrt{11}$ — высота кирпича; M — точка на ребре, где Муравьишка переходит с верхней грани на боковую; s — расстояние от M до ближайшего конца этого ребра.

1. Какие маршруты возможны. Из A в C можно ползти двумя способами с одним пересечением ребра посередине.

Только по вертикальным граням. Развернём две соседние боковые грани в одну плоскость: получится прямоугольник $2a \times h$, а A и C — его противоположные вершины. Прямая между ними пересекает вертикальное ребро ровно посередине. Время $t_1 = \dfrac{\sqrt{(2a)^2 + h^2}}{v} = \dfrac{a\sqrt{15}}{v} \approx 3{,}87\,\dfrac{a}{v}$.

Оно не зависит от u, поэтому по такому маршруту u определить нельзя; это сравнение нужно будет проверить в конце.

Через верхнюю грань. Сначала по верхней грани до горизонтального ребра в точке M, затем по боковой грани вниз до C (рис. 1). Тогда скорость u входит в время, и условие «ровно посередине» её определяет. Берём этот маршрут.

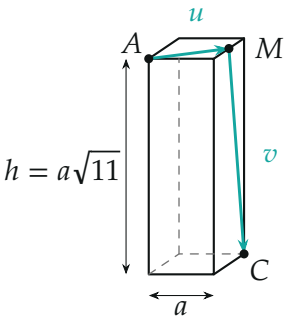


Рис. 1. Кирпич и путь Муравьишки из A в C: по верхней грани (скорость u) до середины ребра M, затем по боковой грани (скорость v)

2. Развёртка. Положим верхнюю грань и боковую грань, которая с ней граничит по ребру с точкой M, в одну плоскость (рис. 2). Внутри каждой грани путь Муравьишки — отрезок прямой: в развёртке кратчайший путь на одной грани является прямой, а скорость в пределах грани постоянна. Введём ось X поперёк ребра и ось Y вдоль него. Ребро — прямая $X = a$, точка $A = (0, 0)$, точка $C = (a + h, a)$, а точка M лежит на ребре на расстоянии s от начала: $M = (a, s)$.

3. Время как функция положения точки M. Путь по верхней грани $AM = \sqrt{a^2 + s^2}$ проходится со скоростью u, путь по боковой $MC = \sqrt{(a - s)^2 + h^2}$ — со скоростью v. Полное время:

$$t(s) = \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{u} + \frac{\sqrt{(a - s)^2 + h^2}}{v}.$$

Здесь s — единственная свобода Муравьишки, остальное задано геометрией. Он выбирает s так, чтобы $t(s)$ было минимальным.

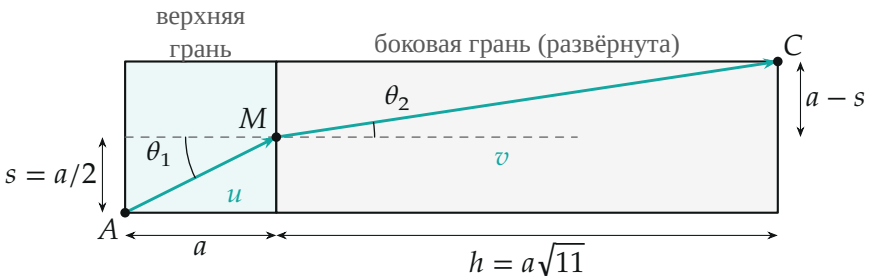


Рис. 2. Развёртка: верхняя грань и боковая грань рядом, ребро — вертикальная линия $X = a$. θ_1 и θ_2 — углы между отрезками пути и нормалью к ребру

4. Условие минимума. В минимуме производная равна нулю:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{u}\cdot\frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} - \frac{1}{v}\cdot\frac{a-s}{\sqrt{(a-s)^2+h^2}} = 0.$$

Дроби в этом выражении — синусы углов между отрезками пути и нормалью к ребру: $\sin\theta_1 = \dfrac{s}{AM}$, $\sin\theta_2 = \dfrac{a-s}{MC}$. Получаем аналог закона преломления:

$$\frac{\sin\theta_1}{u} = \frac{\sin\theta_2}{v}.$$

Знак: при малом s производная отрицательна (сдвиг вдоль ребра сокращает путь по боковой грани быстрее, чем удлиняет по верхней), при s около a — положительна; значит, найденная точка — минимум, а не максимум.

5. Подставляем $s = a/2$. По условию Муравьишка пересекает ребро посередине. Тогда

$$AM = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \qquad MC = \sqrt{\frac{a^2}{4}+11a^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{2},$$

$$\sin\theta_1 = \frac{a/2}{a\sqrt{5}/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\theta_2 = \frac{a/2}{3a\sqrt{5}/2} = \frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

Из условия минимума $u = v\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = 3v$.

6. Время.

$$t = \frac{AM}{u} + \frac{MC}{v} = \frac{a\sqrt{5}}{2\cdot 3v} + \frac{3a\sqrt{5}}{2v} = \frac{a\sqrt{5}}{2v}\left(\frac{1}{3}+3\right) = \frac{5a\sqrt{5}}{3v} \approx 3{,}73\,\frac{a}{v}.$$

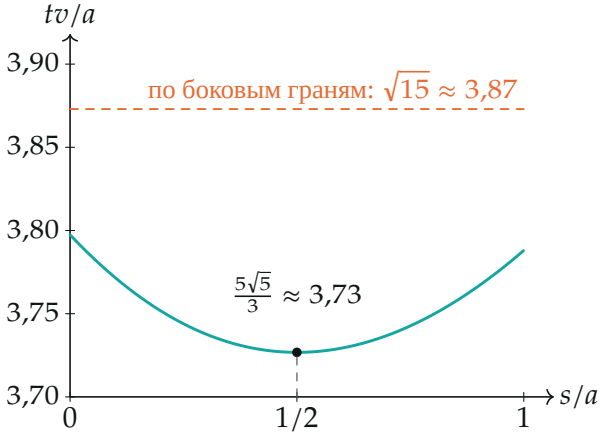


Рис. 3. Время пути через верхнюю грань как функция положения точки M при $u = 3v$ (бирюзовая линия). Минимум — при $s = a/2$; пунктир — время пути только по боковым граням. Ось ординат начинается не с нуля

Обратите внимание. Скорость u не задана, а найдена из того, что минимум достигается именно в середине ребра. Маршрут по двум боковым граням тоже пересекает ребро посередине, но от u не зависит; поэтому пришлось отдельно проверить, что маршрут через верхнюю грань быстрее.

Проверка. Размерность: a/v — время. Маршрут через верхнюю грань быстрее маршрута только по боковым граням: $\dfrac{5\sqrt{5}}{3} \approx 3{,}73 < \sqrt{15} \approx 3{,}87$ (рис. 3), поэтому при $u = 3v$ Муравьишка выбирает именно его. Вторая производная $t(s)$ положительна (сумма двух выпуклых функций), так что $s = a/2$ — единственный минимум. Смысл ответа: по верхней грани Муравьишка ползёт втрое быстрее, чем по боковой. Поэтому путь по верхней грани отклонён от нормали к ребру силь-

нее ($\sin\theta_1 = 3\sin\theta_2$), как луч света при переходе в среду с меньшей скоростью.

Ответ. $t = \dfrac{5a\sqrt{5}}{3v}$; $u = 3v$.