Газ в сосуде, адиабата справа

Задача 2. [МОШ 2009/10, 11 класс, задача 2] Горизонтальный сосуд с идеальным одноатомным газом разделен на две части подвижным вертикальным поршнем, не проводящим тепло. Вначале давление в сосуде было равно p_0, а температура T_0. Нагревая газ в левой части сосуда до температуры $T_0 + \Delta T$, исследуют зависимость давления в системе p от параметра $x = \Delta T/T_0$. Эта зависимость при малых x оказалась линейной: $p = p_0(1 + \alpha x)$ с параметром $\alpha = 0{,}5$. Найдите отношение $k = \nu_1/\nu_2$ количеств газа в левой и правой частях сосуда. Процесс в правой части сосуда адиабатный, трением между поршнем и стенками сосуда можно пренебречь.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Левый газ нагревают, он расширяется и сдвигает поршень вправо. Правый газ тепла не получает и не отдаёт, но поршень его сжимает, поэтому он нагревается, а его давление растёт по адиабате. Поршень подвижный и без трения, значит, в каждый момент давление по обе стороны от него одинаково — это общее p. Задача на малые приращения: пока $x \ll 1$, зависимость любой величины от x линейна, и достаточно связать между собой маленькие изменения Δp, ΔV_1, ΔV_2. Класс задачи — газ в сосуде с подвижной перегородкой, одна часть которого нагревается, а другая сжимается адиабатно.

Обозначения. ν_1, ν_2 — количества газа слева и справа, V_1, V_2 — их начальные объёмы, $V = V_1 + V_2$ — объём сосуда (не меняется), $\gamma = \dfrac{5}{3}$ — показатель адиабаты одноатомного газа, $\Delta p = p - p_0 = \alpha p_0 x$.

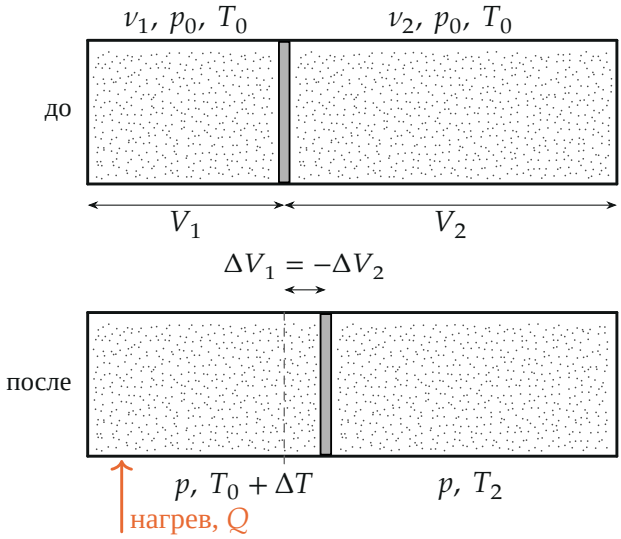


Рис. 1. Сосуд до и после нагрева левой части. Поршень сдвигается вправо на малое расстояние (на рисунке оно увеличено); объём сосуда не меняется, поэтому $\Delta V_1 = -\Delta V_2$

1. Начальное состояние. До нагрева в обеих частях одинаковы давление p_0 и температура T_0. Уравнение состояния идеального газа для каждой части:

$$p_0 V_1 = \nu_1 R T_0, \qquad p_0 V_2 = \nu_2 R T_0.$$

Делим одно на другое: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} = k$. Объёмы частей относятся так же, как количества газа — удобно, потому что k можно искать как отношение объёмов.

2. Левый газ. Газ слева нагрет до $T_0 + \Delta T$, объём стал $V_1 + \Delta V_1$, давление $p_0 + \Delta p$. Уравнение состояния:

$$(p_0 + \Delta p)(V_1 + \Delta V_1) = \nu_1 R\,(T_0 + \Delta T).$$

Раскрываем скобки, вычитаем начальное уравнение $p_0 V_1 = \nu_1 R T_0$ и

отбрасываем $\Delta p\,\Delta V_1$ (произведение двух малых величин):

$$\Delta p\,V_1 + p_0\,\Delta V_1 = \nu_1 R\,\Delta T = p_0 V_1\,x,$$

где использовано $\nu_1 R\Delta T = \nu_1 R T_0 \cdot x = p_0 V_1 x$.

3. Правый газ. Процесс адиабатный (поршень не пропускает тепло, стенки сосуда тоже не отдают его), закон Пуассона: $pV_2'^{\gamma} = \text{const}$. Берём логарифмическую производную: $\dfrac{\Delta p}{p_0} + \gamma\dfrac{\Delta V_2}{V_2} = 0$, откуда

$$\Delta V_2 = -\frac{V_2}{\gamma}\,\frac{\Delta p}{p_0}.$$

Знак: давление растёт, значит, объём правого газа уменьшается.

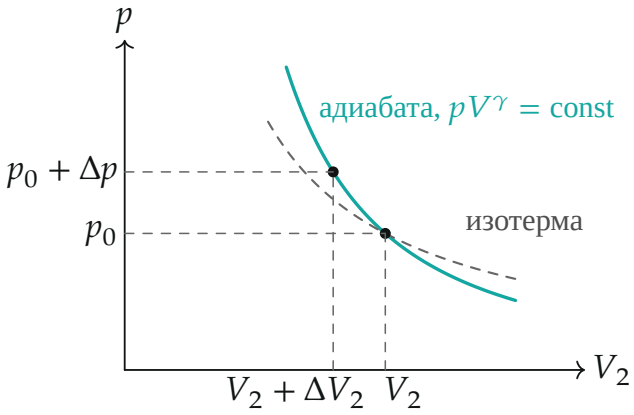


Рис. 2. Сжатие правого газа на p–V-диаграмме: адиабата идёт круче изотермы, поэтому при том же уменьшении объёма давление растёт сильнее. Сдвиг на рисунке для наглядности сделан большим

4. Связь через поршень. Сосуд жёсткий, поэтому $V_1 + V_2 = V$ не меняется: $\Delta V_1 = -\Delta V_2$. Тогда

$$\Delta V_1 = \frac{V_2}{\gamma}\,\frac{\Delta p}{p_0}.$$

5. Собираем. Подставляем ΔV_1 в уравнение для левого газа:

$$\Delta p\, V_1 + \frac{V_2}{\gamma}\,\Delta p = p_0 V_1 x.$$

Подставляем $\Delta p = \alpha p_0 x$ и сокращаем на $p_0 x$ (оно не нуль):

$$\alpha\left(V_1 + \frac{V_2}{\gamma}\right) = V_1 \quad\Longrightarrow\quad \alpha\left(k + \frac{1}{\gamma}\right) = k \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{\alpha}{\gamma\,(1-\alpha)}.$$

6. Числа. $\gamma = \dfrac{5}{3}$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$: $k = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{0{,}5}{0{,}5} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

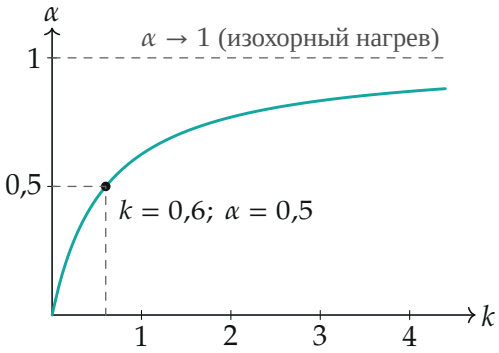


Рис. 3. Зависимость $\alpha(k) = \dfrac{\gamma k}{1+\gamma k}$, полученная из формулы $k = \dfrac{\alpha}{\gamma(1-\alpha)}$; отмечен ответ задачи

Обратите внимание. Давление при нагреве не постоянно, а правый газ сжимается не изотермически: тепла он не получает и при сжатии нагревается, поэтому $\dfrac{\Delta V_2}{V_2} = -\dfrac{\Delta p}{\gamma p_0}$, а не $-\dfrac{\Delta p}{p_0}$ (с изотермой вышло бы $k = 1$). Малость x нужна, чтобы отбросить $\Delta p\,\Delta V_1$ и считать адиабату на малом участке прямой.

Проверка. Размерность: k безразмерно. Предел $k \to \infty$ (правого газа мало): чтобы поднять давление, правому газу достаточно сжаться на ничтожную долю объёма сосуда, поршень почти не сдвигается, левый газ нагревается при почти постоянном объёме, и формула даёт $\alpha \to 1$,

то есть $p \propto T$. Предел $k \to 0$ (мало левого газа): левый газ может расшириться лишь на малую долю объёма сосуда, правый почти не сжимается, и $\alpha \to 0$. Численное решение точной системы $pV_1' = \nu_1 RT$, $pV_2'^{\gamma} = p_0 V_2^{\gamma}$, $V_1' + V_2' = V$ при $k = 0{,}6$ и $x = 10^{-4}$ даёт $\alpha = 0{,}49999$, как и должно быть.

Ответ. $k = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{\alpha}{1-\alpha} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6.$