Кольцо заряженных шариков в выключаемом поле

Задача 4. [МОШ 2009/10, 11 класс, задача 4] На гладкой горизонтальной плоскости лежат N маленьких одинаково заряженных шариков равной массы (см. рисунок). Суммарный заряд шариков Q, суммарная масса M. Шарики связаны друг с другом непроводящей легкой нерастяжимой нитью, образуя кольцо. Длина нити между двумя соседними шариками равна l. Система находится в вертикальном магнитном поле B, причем суммарный поток магнитной индукции, пронизывающий кольцо, равен Φ_0. Изначально все шарики покоятся. В некоторый момент магнитное поле выключают. Найдите изменение ΔF силы натяжения нити после выключения поля.

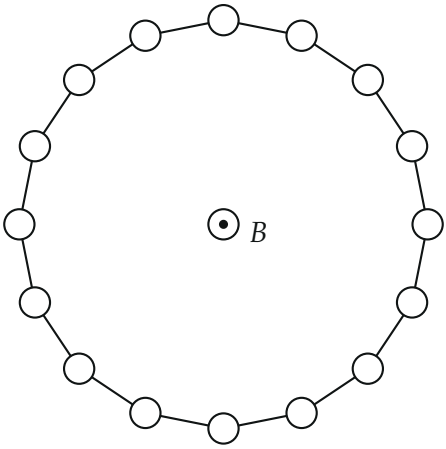


Рисунок условия: кольцо из шариков на нити, поле B направлено вверх (на нас). Число шариков на рисунке условное

▲ **Решение. Что происходит.** Когда поле выключают, поток магнитной индукции через кольцо убывает от Φ_0 до нуля. Изменяющийся поток порождает вихревое электрическое поле, силовые линии которого — окружности вокруг оси поля. Оно действует вдоль окружности на каждый заряженный шарик и разгоняет его по касательной: кольцо начинает вращаться. Вращающимся шарикам нужна центростремительная

сила, и её даёт добавка к натяжению нити. Класс задачи — электромагнитная индукция в системе зарядов на нити (закон Фарадея плюс динамика кругового движения).

Обозначения. $q = \dfrac{Q}{N}$, $m = \dfrac{M}{N}$ — заряд и масса одного шарика; R — радиус кольца; v — скорость шарика после выключения поля; T_1 и T_2 — натяжения нити до и после выключения поля, $\Delta F = T_2 - T_1$; F_C — результирующая кулоновская сила, действующая на шарик со стороны остальных (она по симметрии направлена по радиусу наружу).

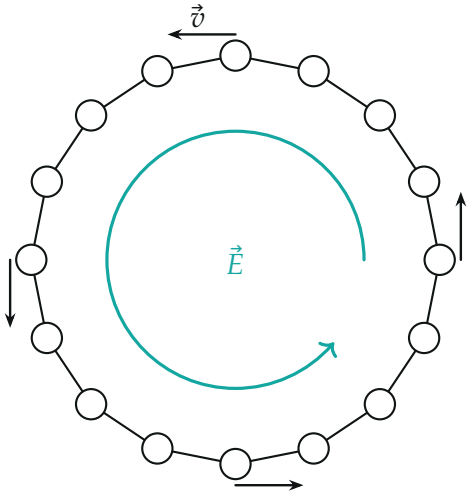


Рис. 1. Вид сверху в момент убывания B: вихревое электрическое поле $\vec{E}$ направлено против часовой стрелки (оно стремится поддержать убывающий поток, поле «на нас»), шарики разгоняются по касательной

1. Геометрия. Кольцо — правильный N-угольник со стороной l и вершинами на окружности радиуса R. Соседние шарики видны из центра под углом $\dfrac{2\pi}{N}$, поэтому

$$l = 2R\sin\frac{\pi}{N}, \qquad R = \frac{l}{2\sin(\pi/N)}.$$

Радиус кольца при раскручивании не меняется: нить нерастяжима и натянута (шарики одноимённо заряжены и отталкиваются).

2. Скорость шарика после выключения поля. Применим закон электромагнитной индукции к контуру — окружности радиуса R, проходящей по шарикам: циркуляция вихревого поля равна ЭДС, то есть $E \cdot 2\pi R = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ (по модулю $\dfrac{|d\Phi|}{dt}$; E — касательная составляющая). Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на касательную:

$$m\frac{dv}{dt} = qE.$$

Здесь учтено, что другие силы касательной составляющей не дают: две силы натяжения нити симметричны и их касательные составляющие взаимно уничтожаются, кулоновская сила радиальна, магнитная сила $q\vec{v} \times \vec{B}$ перпендикулярна скорости, то есть тоже радиальна. Проинтегрируем по времени выключения. Начальная скорость нуль, а $\int E\,dt = \dfrac{1}{2\pi R}\int |d\Phi| = \dfrac{\Phi_0}{2\pi R}$ (поток убывает от Φ_0 до нуля):

$$mv = \frac{q\Phi_0}{2\pi R} \quad\Longrightarrow\quad v = \frac{q\Phi_0}{2\pi Rm} = \frac{Q\Phi_0}{2\pi RM} = \frac{Q\Phi_0 \sin(\pi/N)}{\pi lM}.$$

Результат не зависит от того, как быстро выключено поле: важен только итоговый поток.

3. Радиальное уравнение до и после. Каждый шарик движется по окружности радиуса R (или покоится), поэтому его радиальное ускорение равно $\dfrac{v^2}{R}$ и направлено к центру. На шарик в радиальном направлении действуют: две силы натяжения, радиальные составляющие которых $T\sin\dfrac{\pi}{N}$ направлены к центру, кулоновская сила F_C наружу (она одна и та же до и после, потому что расстояния между шариками не изменились), и магнитная сила, но после выключения поля она равна нулю. Второй закон Ньютона в проекции на радиус, к центру:

$$\text{до:}\quad 0 = 2T_1 \sin\frac{\pi}{N} - F_C, \qquad \text{после:}\quad \frac{mv^2}{R} = 2T_2 \sin\frac{\pi}{N} - F_C.$$

Вычитаем первое из второго и пользуемся $2R\sin\dfrac{\pi}{N} = l$:

$$2\,\Delta F\,\sin\frac{\pi}{N} = \frac{mv^2}{R} \quad\Longrightarrow\quad \Delta F = \frac{mv^2}{2R\sin(\pi/N)} = \frac{mv^2}{l}.$$

Знак: $\Delta F > 0$, натяжение растёт: нить дополнительно удерживает шарики от разлёта по касательной.

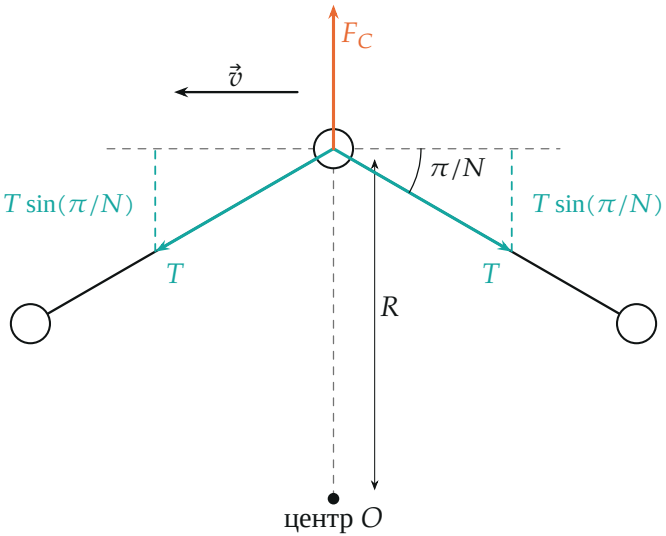


Рис. 2. Силы на один шарик (число шариков для наглядности взято малым, $N = 6$; соседние шарики лежат на той же окружности радиуса R): натяжения T вдоль нити, кулоновская сила F_C наружу, скорость $\vec{v}$ по касательной. Угол между нитью и касательной равен $\dfrac{\pi}{N}$; радиальная составляющая каждого натяжения $T\sin\dfrac{\pi}{N}$ направлена к центру

4. Подставляем скорость.

$$\Delta F = \frac{M}{N\,l}\cdot\frac{Q^2\Phi_0^2\sin^2(\pi/N)}{\pi^2 l^2 M^2} = \frac{Q^2\Phi_0^2\sin^2\dfrac{\pi}{N}}{\pi^2\,M\,N\,l^3}.$$

Обратите внимание. Нельзя считать, что натяжение после выключения поля равно только «центростремительной» добавке mv^2/R на ша-

рик: в радиальное уравнение входит ещё и кулоновское отталкивание, которое компенсируется той же нитью. В разность оно сокращается, потому что до и после поля оно одинаково.

Проверка. Размерность: $[Q\Phi_0] = \text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = \text{Дж} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, поэтому $\dfrac{(Q\Phi_0)^2}{MNl^3}$ имеет размерность $\dfrac{\text{кг}^2\text{м}^4/\text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ — ньютоны. Предел $N \to \infty$: $\sin\dfrac{\pi}{N} \approx \dfrac{\pi}{N}$ и $Nl = 2\pi R = L$ — длина кольца, получаем $\Delta F = \dfrac{Q^2\Phi_0^2}{ML^3}$. Прямой расчёт для сплошного заряженного кольца массы M даёт то же: $v = \dfrac{Q\Phi_0}{2\pi RM}$, добавка к натяжению $\Delta F = \dfrac{Mv^2}{2\pi R} = \dfrac{Q^2\Phi_0^2}{8\pi^3R^3M} = \dfrac{Q^2\Phi_0^2}{ML^3}$.

Ответ. $\Delta F = \dfrac{Q^2\Phi_0^2 \sin^2\dfrac{\pi}{N}}{\pi^2MNl^3}$.