Размытость на снимке

Задача 5. [МОШ 2009/10, 11 класс, задача 5] Взяв старый пленочный фотоаппарат, школьник Вася отправился фотографировать соревнования по легкой атлетике. Сделав достаточное количество фотографий с разными выдержками, Вася обнаружил, что спортсмены, пробегавшие на расстоянии $a_0 = 10$ м от фотоаппарата перпендикулярно оптической оси объектива, получались на снимках четкими, если затвор фотоаппарата открывался на время, не превосходящее $\tau = 0{,}001$ с. При этом неподвижные предметы, расположенные на расстояниях менее $a_1 = 5$ м от фотоаппарата, получались размытыми. Определите диаметр D объектива фотоаппарата. Скорости спортсменов считайте равными $v = 10$ м/с.

▲ **Решение. Что происходит.** На плёнке изображение размывается по двум причинам. Первая — движение: за время выдержки спортсмен смещается, и его изображение сдвигается по плёнке. Вторая — расфокусировка: предмет, стоящий ближе или дальше расстояния, на которое наведён объектив, даёт на плёнке не точку, а пятно. Снимок считается чётким, пока размытость не больше некоторой допустимой величины ε, одной и той же в обеих ситуациях. Раз спортсмены на расстоянии a_0 получаются чёткими именно при коротких выдержках, объектив наведён на резкость на расстояние a_0: размытость спортсмена даёт только движение. Тогда условие «неподвижные предметы ближе a_1 размыты» означает, что на расстоянии a_1 пятно расфокусировки как раз равно допустимому. Приравняем две размытости — величина ε в ответ не войдёт. Класс задачи — построение изображений тонкой линзой, конус лучей и увеличение.

Обозначения. f — фокусное расстояние объектива (в ответ не войдёт), D — диаметр объектива, d_0 — расстояние от объектива до плёнки, δ — сдвиг изображения спортсмена за выдержку, b — диаметр пятна расфокусировки для предмета на расстоянии a_1.

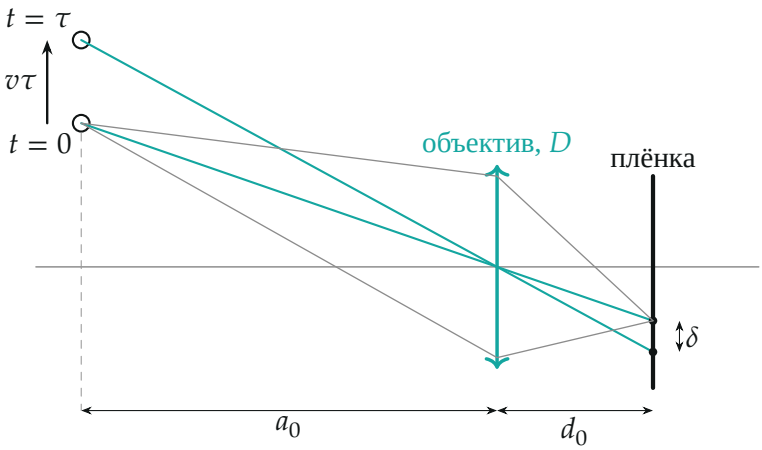


Рис. 1. Сдвиг изображения: за выдержку τ спортсмен проходит $v\tau$ поперёк оси, а изображение на плёнке сдвигается на δ. Показан луч через центр объектива (он не преломляется) и конус лучей через края объектива: все они сходятся в точке на плёнке, потому что объектив наведён на расстояние a_0. Масштаб условный

1. Где стоит плёнка. Объектив наведён на расстояние a_0: изображение предмета, стоящего там, получается ровно на плёнке. Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f} \quad \Longrightarrow \quad d_0 = \frac{a_0 f}{a_0 - f}.$$

2. Размытость от движения. Луч, идущий через центр объектива, не преломляется. Спортсмен и его изображение лежат на таком луче, поэтому поперечные размеры связаны отношением расстояний $\dfrac{d_0}{a_0} = \dfrac{f}{a_0 - f}$ (поперечное увеличение). Спортсмен за τ проходит $v\tau$ поперёк оси, изображение сдвигается на

$$\delta = v\tau \cdot \frac{d_0}{a_0} = \frac{v\tau f}{a_0 - f}.$$

При выдержке τ эта величина как раз равна допустимой размытости: $\delta = \varepsilon$.

3. Размытость от расфокусировки. Неподвижная точка на оси на расстоянии $a_1 < a_0$ даёт изображение там, где её лучи сходятся: $d_1 = \dfrac{a_1 f}{a_1 - f}$. Так как $a_1 < a_0$, то $d_1 > d_0$, и сходиться лучи будут уже за плёнкой. Лучи заполняют конус с основанием D на объективе и вершиной на расстоянии d_1. Плёнка стоит на расстоянии d_0, то есть не доходит до вершины на $d_1 - d_0$. По подобию треугольников диаметр пятна на плёнке

$$b = D\,\frac{d_1 - d_0}{d_1} = D\left(1 - \frac{d_0}{d_1}\right).$$

Подставим d_0 и d_1:

$$\frac{d_0}{d_1} = \frac{a_0}{a_0 - f} \cdot \frac{a_1 - f}{a_1}, \quad b = D\,\frac{(a_0 - f)a_1 - a_0(a_1 - f)}{(a_0 - f)\,a_1} = \frac{Df\,(a_0 - a_1)}{(a_0 - f)\,a_1}.$$

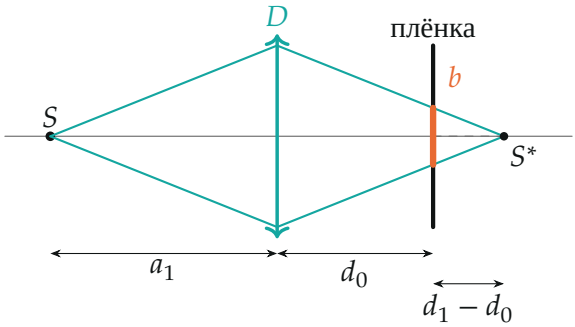


Рис. 2. Расфокусировка: точка на расстоянии $a_1 < a_0$ собирает лучи в точке S^* за плёнкой (на расстоянии d_1 от объектива), на плёнке получается пятно диаметра b. Масштаб условный

4. Условие задачи. На расстоянии a_1 размытость от расфокусировки равна допустимой, и допустимая же размытость набирается движением спортсмена: $b = \delta$.

$$\frac{Df\,(a_0 - a_1)}{(a_0 - f)\,a_1} = \frac{v\tau f}{a_0 - f}.$$

Фокусное расстояние и множитель $a_0 - f$ сокращаются — поэтому в

ответ не входят ни f, ни ε:

$$D\frac{a_0 - a_1}{a_1} = v\tau \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{v\tau}{\dfrac{a_0}{a_1} - 1}.$$

5. Число. $\dfrac{a_0}{a_1} - 1 = \dfrac{10}{5} - 1 = 1$, поэтому $D = v\tau = 10$ м/с $\cdot\, 10^{-3}$ с $= 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ м $= 1$ см.

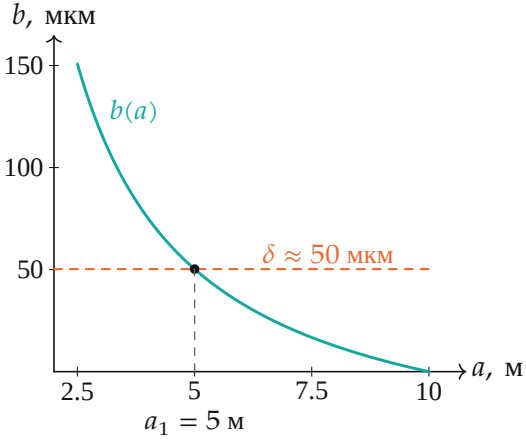


Рис. 3. Пятно расфокусировки b неподвижного предмета в зависимости от расстояния a до него (для $f = 5$ см, $D = 1$ см). Оно равно сдвигу δ ровно при $a = a_1 = 5$ м; ближе пятно больше, дальше — меньше, на a_0 равно нулю

Обратите внимание. Диаметр не зависит от фокусного расстояния и допустимой размытости: по условию они одни и те же в двух опытах и сокращаются. В решении нужно было заметить, что объектив наведён на a_0, иначе у спортсменов добавлялась бы расфокусировка.

Проверка. Размерность: $v\tau$ — метры. Численная проверка с реальными числами ($f = 5$ см, $a_0 = 10$ м, $a_1 = 5$ м, $D = 1$ см): $\delta = \dfrac{v\tau f}{a_0 - f} = 50{,}3$ мкм, $b = \dfrac{Df(a_0 - a_1)}{(a_0 - f)a_1} = 50{,}3$ мкм, значения совпадают. Допущение о наводке на a_0 согласовано с условием: в нём сказано только, что размыты предметы *ближе* a_1, то есть всё дальше, вплоть до бесконечности,

резко. Для предмета на бесконечности пятно $b_\infty = \dfrac{Df}{a_0 - f}$, и при $D = v\tau$ оно равно $\dfrac{v\tau f}{a_0 - f} = \delta$ — ровно допустимому: дальняя граница резкости как раз уходит в бесконечность (так и бывает, когда $a_1 = a_0/2$). Предел $a_1 \to a_0$: $D \to \infty$, то есть заметно размыть предмет, почти не отличающийся по расстоянию от a_0, может лишь очень большое отверстие. Предел $a_1 \to 0$: $D \to 0$.

Ответ. $D = \dfrac{v\tau}{(a_0/a_1) - 1} = 1$ см.