Шайба, горка и движущаяся стенка

Задача 6. [МОШ 2009/10, 11 класс, задача 6] На гладкой горизонтальной плоскости покоится гладкая горка высотой H и массой M, а на ее вершине лежит небольшая шайба массой m (см. рисунок). После легкого толчка шайба скатывается с горки и скользит перпендикулярно массивной вертикальной стенке, движущейся по плоскости в сторону горки со скоростью u. Испытав абсолютно упругое столкновение со стенкой, шайба скользит в обратном направлении, к горке. С какой минимальной скоростью u должна двигаться стенка, чтобы шайба смогла преодолеть горку?

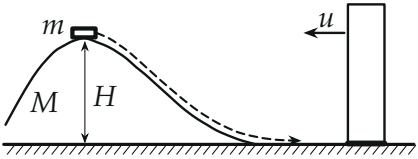


Рисунок к условию: горка массой M, шайба m на её вершине и стенка, едущая к горке со скоростью u

▲ **Решение. Что происходит.** Процесс состоит из трёх этапов (рис. 1): спуск шайбы с подвижной горки, удар о движущуюся стенку и подъём на горку, которая к этому моменту уже уехала. Спуск и подъём — взаимодействие двух тел, на которые по горизонтали не действуют внешние силы, поэтому сохраняются горизонтальный импульс и энергия системы «шайба + горка». Удар о массивную стенку упругий: в системе отсчёта стенки шайба просто отражается с той же скоростью. Минимальной скорости стенки соответствует случай, когда шайба едва достигает вершины: там её скорость относительно горки равна нулю, и вся кинетическая энергия относительного движения перешла в потенциальную mgH.

Обозначения. Ось X направим от горки к стенке (вправо). v — скорость шайбы в конце спуска (вправо), V — скорость горки (влево, то есть $-V$ по оси), $\mu = \dfrac{m}{M}$, c — модуль скорости шайбы после удара (влево).

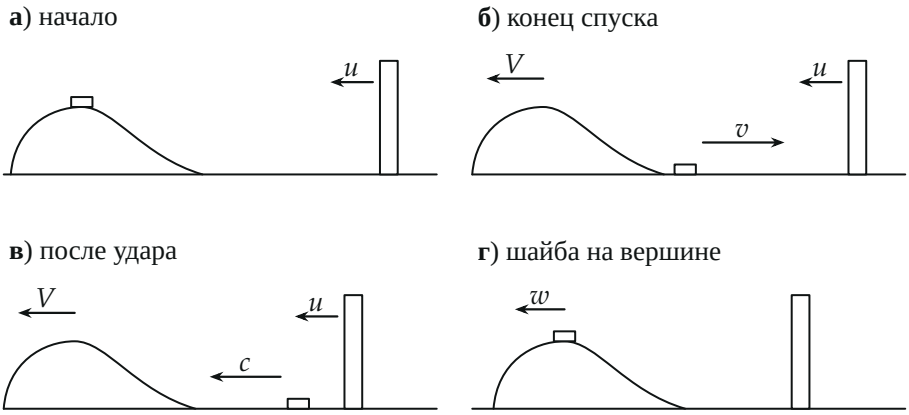


Рис. 1. Четыре стадии: а) шайба на вершине; б) шайба внизу, горка уехала от стенки; в) после упругого удара шайба движется к горке со скоростью $c = v + 2u$; г) шайба на вершине, шайба и горка движутся с общей скоростью w. Масштаб условный

1. Спуск. Система «шайба + горка» на гладкой плоскости не имеет внешних горизонтальных сил, и вначале всё покоится. Закон сохранения горизонтальной проекции импульса и закон сохранения энергии (трения нет, потенциальная энергия шайбы уменьшилась на mgH) для конца спуска:

$$0 = mv - MV, \qquad mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

Из первого $V = \mu v$. Подставим во второе: $mgH = \dfrac{mv^2}{2}(1 + \mu)$, откуда

$$v^2 = \frac{2gH}{1 + \mu}, \qquad V = \mu v.$$

Горка после схода шайбы движется равномерно (внешних сил нет), и V остаётся таким.

2. Удар о стенку. Стенка массивная, её скорость при ударе не меняется: $-u$ по оси X. Перейдём в систему отсчёта стенки: шайба налетает со скоростью $v - (-u) = v + u$ и при абсолютно упругом ударе отскакивает с той же по модулю скоростью в обратную сторону. Вернёмся в

систему отсчёта плоскости: скорость шайбы после удара $-u-(v+u) = -(v+2u)$, то есть модуль

$$c = v + 2u, \qquad \text{направление — к горке (влево).}$$

Шайба стала быстрее на $2u$: стенка «поддала» её навстречу.

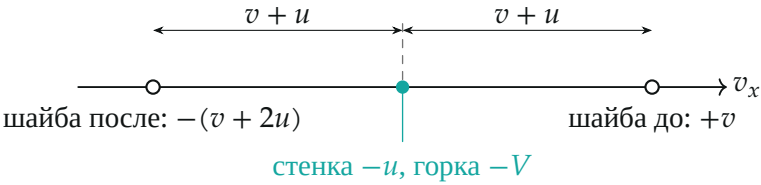


Рис. 2. Удар на оси скоростей: относительно стенки шайба отражается: расстояния $v+u$ от скорости стенки до скорости шайбы до и после удара равны. Изображён предельный случай $u = V$ (пример $m/M = \frac{1}{2}$, $v = 1$)

3. Подъём. Теперь шайба (скорость c влево) догоняет горку (скорость V влево, $c > V$) и въезжает на неё. Предельный случай: шайба доходит до вершины и останавливается относительно горки — в этот момент обе скорости равны общему w (влево). Законы сохранения для системы «шайба + горка» от начала подъёма до этого момента:

$$mc + MV = (m+M)\,w, \qquad \frac{mc^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{(m+M)w^2}{2} + mgH.$$

Исключим w: из первого $w = \dfrac{mc+MV}{m+M}$, и

$$mc^2 + MV^2 - \frac{(mc+MV)^2}{m+M} = \frac{mM}{m+M}\,(c-V)^2,$$

поэтому второе уравнение превращается в

$$\frac{mM}{m+M}\,\frac{(c-V)^2}{2} = mgH \;\Rightarrow\; (c-V)^2 = 2gH\,\frac{m+M}{M} = 2gH\,(1+\mu).$$

Смысл: на подъём уходит только энергия относительного движения, а энергия движения центра масс сохраняется как кинетическая.

4. Подстановка. Из п. 1: $2gH = v^2(1+\mu)$, поэтому $2gH(1+\mu) = v^2(1+\mu)^2$ и $c - V = v(1+\mu)$. Тогда

$$c = V + v(1+\mu) = \mu v + v + \mu v = v(1+2\mu).$$

Сравниваем с $c = v + 2u$: $2u = 2\mu v$, то есть

$$u_{\min} = \mu v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gH}{1+m/M}}.$$

Шайба преодолеет горку при $u \geq u_{\min}$: чем больше c, тем больше остаётся энергии относительного движения на вершине.

Обратите внимание. Горка после спуска не стоит, а уезжает от стенки со скоростью $V = \mu v$, поэтому шайбе нужна не просто скорость v, а достаточная скорость *относительно горки*: нельзя применять к подъёму условие $\frac{mc^2}{2} \geq mgH$ с неподвижной горкой.

Проверка. Размерность: $\frac{m}{M}\sqrt{gH}$ — скорость. Второй способ в системе отсчёта горки (после спуска она инерциальна): шайба уехала от горки со скоростью $v + V$, а к вершине вернётся, только если вернётся к ней с тем же модулем относительной скорости (процесс спуска обратим). Стенка в системе горки движется со скоростью $u - V$ *к горке*, и после упругого удара относительная скорость шайбы равна $(v+V)+2(u-V)$; она не меньше $v + V$ при $u \geq V$. Минимум $u = V = \mu v$ — тот же ответ, и видно, что стенка должна ехать не медленнее горки (на рис. 2 скорости стенки и горки совпали). Предел $m \ll M$: $u_{\min} \to 0$, горка почти неподвижна, и шайбе достаточно отразиться от неподвижной стенки.

Ответ. $u_{\min} = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gH}{1+m/M}}$.