КПД цикла с линейными участками

Задача 7. [МОШ 2009/10, 11 класс, задача 7] На pV-диаграмме представлен цикл 1–2–3–4, который проводится с идеальным одноатомным газом. Участки 2–3 и 4–1 цикла соответствуют изохорным процессам, на участках 1–2 и 3–4 цикла давление газа изменяется прямо пропорционально его объему. Давление газа в состояниях 1 и 3 одинаково. Найдите КПД этого цикла, если отношение максимального объема газа к его минимальному объему равно $n = 1{,}5$.

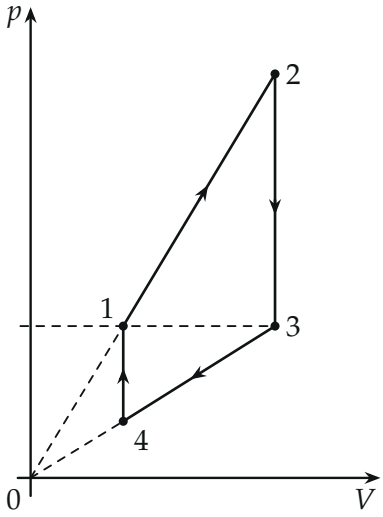


Рисунок условия: цикл 1–2–3–4. Пунктиром продолжены прямые 1–2 и 3–4 до начала координат: на них $p \propto V$

▲ **Решение. Что происходит.** Газ расширяется на участке 1–2 при растущем давлении, потом при постоянном объёме отдаёт тепло (2–3), сжимается на участке 3–4 и при постоянном объёме нагревается (4–1). КПД цикла — работа за цикл, делённая на полученное тепло: $\eta = \dfrac{A}{Q_+}$. Здесь Q_+ — только тепло, которое газ получает, а отданное в знаменатель не входит. Задача поэтому в том, чтобы найти работу и понять, на каких участках тепло подводится. Класс задачи — КПД цикла с линейными участками.

Обозначения. V — минимальный объём (состояния 1 и 4), p_1 — давление в состояниях 1 и 3, n — отношение объёмов, ν — количество газа. Для одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$.

1. Координаты состояний. На участке 1–2 давление пропорционально объёму: прямая проходит через начало координат и точку 1 (V, p_1). Состояние 2 лежит на изохоре 2–3 с максимальным объёмом nV, поэтому $p_2 = np_1$. Состояние 3: $V_3 = nV$, $p_3 = p_1$ (по условию). На участке 3–4 тоже $p \propto V$, и точка 4 лежит на изохоре 4–1, то есть $V_4 = V$, $p_4 = p_3\dfrac{V}{nV} = \dfrac{p_1}{n}$:

$$1\,(V,\,p_1);\quad 2\,(nV,\,np_1);\quad 3\,(nV,\,p_1);\quad 4\left(V,\,\frac{p_1}{n}\right).$$

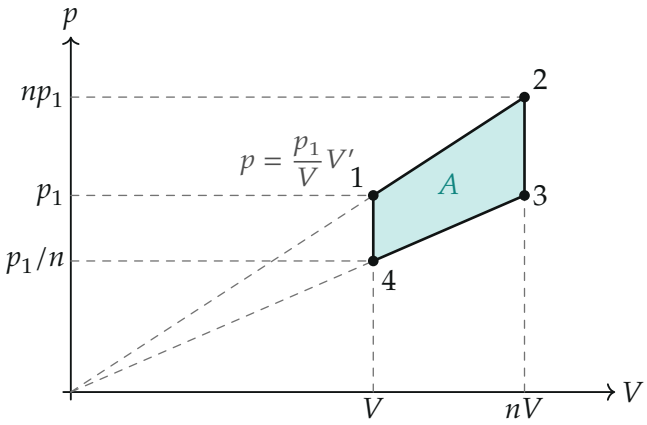


Рис. 1. Цикл с координатами в единицах V и p_1 (для $n = 1{,}5$). Заливка — работа газа за цикл A

2. Работа за цикл равна площади цикла (по часовой стрелке — положительна). Между прямыми 1–2 ($p = \dfrac{p_1}{V}V'$) и 4–3 ($p = \dfrac{p_1}{nV}V'$) при

изменении объёма V' от V до nV:

$$A = \int_V^{nV} \frac{p_1}{V}\left(1 - \frac{1}{n}\right) V'\,dV' = \frac{p_1}{V} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n^2-1)V^2}{2} = \frac{p_1 V\,(n-1)(n^2-1)}{2n}.$$

Проверка площадью: это разность площадей двух треугольников с вершиной в начале координат.

3. Где тепло подводится. Первое начало термодинамики $Q = \Delta U + W$, внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}pV$. Температура пропорциональна pV, на линиях $p \propto V$ она пропорциональна V^2.

1–2: газ расширяется, $T \propto V^2$ растёт, значит $\Delta U > 0$ и $W > 0$, $Q_{12} > 0$:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\,p_1 V(n^2-1), \qquad W_{12} = \frac{p_1 + np_1}{2}(n-1)V = \frac{p_1 V(n^2-1)}{2},$$
$$Q_{12} = \Delta U_{12} + W_{12} = 2p_1 V\,(n^2-1).$$

2–3: изохорное охлаждение (p падает от np_1 до p_1), $W = 0$, $\Delta U < 0$, $Q_{23} = \frac{3}{2}\,nVp_1(1-n) < 0$: газ отдаёт тепло.

3–4: газ сжимается ($W < 0$), $T \propto V^2$ убывает ($\Delta U < 0$), значит $Q_{34} < 0$:

$$Q_{34} = \frac{3}{2}p_1 V\left(\frac{1}{n} - n\right) - \frac{p_1 V(n^2-1)}{2n} = -\frac{2p_1 V(n^2-1)}{n}.$$

4–1: изохорный нагрев (p растёт от p_1/n до p_1), $W = 0$:

$$Q_{41} = \Delta U_{41} = \frac{3}{2}V\,p_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{3p_1 V(n-1)}{2n} > 0.$$

Тепло получает газ на участках 1–2 и 4–1:

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{41} = p_1 V\left[2(n^2-1) + \frac{3(n-1)}{2n}\right].$$

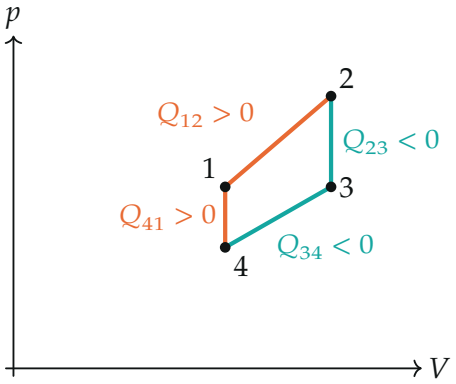


Рис. 2. Тепловой баланс цикла: оранжевые участки (1–2 и 4–1) — газ получает тепло, бирюзовые (2–3 и 3–4) — отдаёт

4. КПД. Делим работу на подведённое тепло. Для сокращения умножим числитель и знаменатель на $\dfrac{2n}{p_1V}$:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{(n-1)(n^2-1)}{4n(n^2-1)+3(n-1)} = \frac{n^2-1}{4n(n+1)+3} = \frac{n^2-1}{4n^2+4n+3}.$$

5. Число. $n = \dfrac{3}{2}$: $\eta = \dfrac{9/4-1}{9+6+3} = \dfrac{5/4}{18} = \dfrac{5}{72} \approx 0{,}069 \approx 7\%$.

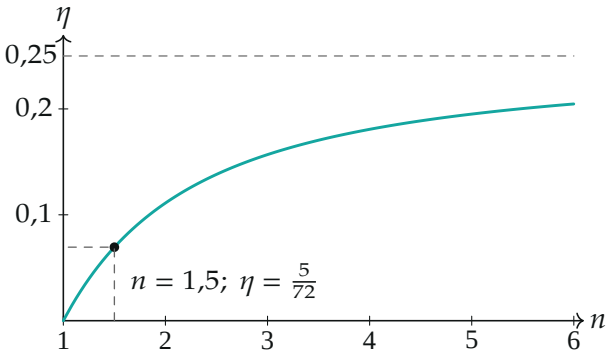


Рис. 3. КПД цикла как функция n: при $n \to 1$ цикл вырождается в линию и $\eta \to 0$; при $n \to \infty$ КПД стремится к $\frac{1}{4}$

Обратите внимание. В знаменатель КПД входит тепло, полученное газом, а не всё «тепло цикла»: на участках 2–3 и 3–4 газ тепло отдаёт, и считать их в Q_+ нельзя. Знак теплоты на наклонных участках проверяем по обоим слагаемым ΔU и W: на линии $p \propto V$ элементарная теплота $\delta Q = d\left(\frac{3}{2}pV\right) + p\,dV = 4p\,dV$ имеет знак dV, поэтому знак не меняется вдоль всего участка.

Проверка. Баланс энергии: $Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = A$. При $n = \frac{3}{2}$ в единицах p_1V: $2{,}5 - 1{,}125 - 1{,}667 + 0{,}5 = 0{,}208$, а $A = \dfrac{0{,}5 \cdot 1{,}25}{3} = 0{,}208$. Совпадает. КПД не превышает КПД Карно между крайними температурами: $T_{\max}/T_{\min} = \dfrac{n^2 p_1 V}{p_1 V/n} = n^3$, $\eta_{\text{Карно}} = 1 - \dfrac{1}{n^3} \approx 0{,}70 > 0{,}069$. Предел $n \to 1$: $\eta \to 0$.

Ответ. $\eta = \dfrac{n^2 - 1}{4n^2 + 4n + 3} = \dfrac{5}{72} \approx 0{,}07$.