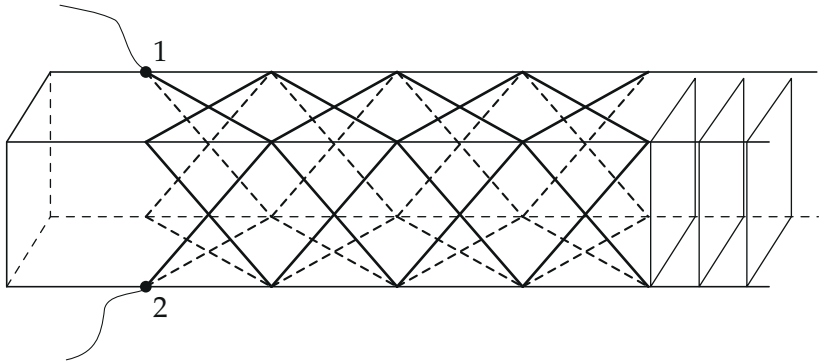
Бесконечный «чулок» из проволок

Задача 8. [МОШ 2009/10, 11 класс, задача 8] На длинный (полубесконечный) деревянный брусок намотаны восемь одинаковых длинных проволок, начала которых попарно соединены, как показано на рисунке. Найдите сопротивление R_{12} между точками 1 и 2 этой бесконечной цепи в виде «чулка», надетого на брусок, если сопротивление участка провода, находящегося между двумя соседними пересечениями проволок, равно R. Во всех точках пересечения между проволоками имеется электрический контакт.



▲ **Решение. Что происходит.** Проволоки намотаны на брусок квадратного сечения как оплётка: четыре идут по винтовой линии в одну сторону и четыре в другую. За один шаг каждая проволока переходит по диагонали грани на соседнее ребро; на каждом ребре в конце шага встречаются две проволоки, а в центре каждой грани диагонали скрещиваются. Во всех пересечениях контакт есть, так что получается бесконечная периодическая сетка из одинаковых резисторов R. Главный инструмент — симметрия: она заранее говорит, у каких узлов потенциал нулевой, и бесконечная сетка сводится к цепочке одинаковых звеньев. Класс задачи — бесконечная симметричная цепь.

Обозначения. Рёбра бруска занумеруем по кругу: 0, 1, 2, 3 (рёбра 0 и 2 — противоположные, на них клеммы 1 и 2; рёбра 1 и 3 — два других). Номер шага вдоль бруска — $k = 0, 1, 2, \ldots$; клемма 1 лежит на ребре 0

при $k = 0$, клемма 2 — на ребре 2 при $k = 0$ (рис. 1). Узел «ребро j, шаг k» обозначим $E_{j,k}$; узел в центре грани между рёбрами j и $j + 1$ между шагами k и $k + 1$ — $F_{j,k}$. Узел $F_{j,k}$ соединён резисторами R с четырьмя узлами: $E_{j,k}$, $E_{j,k+1}$, $E_{j+1,k}$, $E_{j+1,k+1}$ (это четыре половины двух диагоналей). Каждое $E_{j,k}$ при $k \geq 1$ соединено резисторами R с четырьмя узлами F: двумя из слоя k и двумя из слоя $k - 1$ (по две соседние грани).

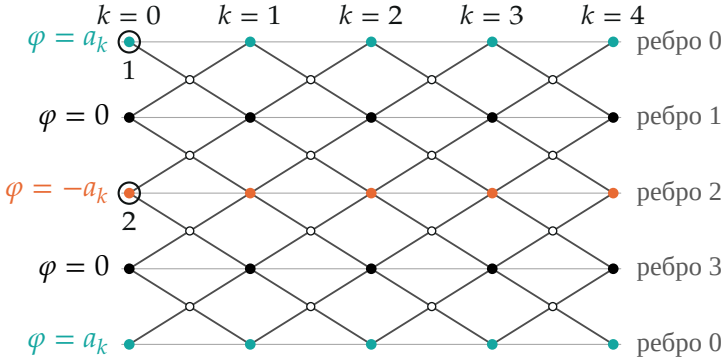


Рис. 1. Развёртка боковой поверхности бруска: по вертикали рёбра 0, 1, 2, 3 (ребро 0 повторено внизу, поверхность замкнута), по горизонтали шаги k. Чёрные и цветные точки — узлы на рёбрах, белые кружки — узлы в центрах граней, отрезки — резисторы R. Слева подписаны потенциалы рёбер, найденные в п. 2

1. Постановка. Пропустим через клеммы ток I (вход в точку 1, выход из точки 2) и найдём разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Тогда $R_{12} = U/I$. Потенциал можно отсчитывать от любого уровня; выберем его так, чтобы $\varphi_1 = -\varphi_2$.

2. Что даёт симметрия. Два преобразования переводят цепь в себя.

Поворот сечения на 180° меняет рёбра $0 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 3$ и меняет клеммы местами. Это то же, что поменять знак тока и потенциала, поэтому $\varphi(E_{j+2,k}) = -\varphi(E_{j,k})$.

Отражение в плоскости, проходящей через рёбра 0 и 2, меняет рёбра 1 и 3 и оставляет клеммы на месте, а сетка при нём переходит сама в себя (правые витки в левые). Поэтому $\varphi(E_{1,k}) = \varphi(E_{3,k})$.

Из первого следует $\varphi(E_{3,k}) = -\varphi(E_{1,k})$, из второго — равенство тех же величин: значит, обе равны нулю:

$$\varphi(E_{1,k}) = \varphi(E_{3,k}) = 0.$$

Обозначим $\varphi(E_{0,k}) = a_k$, тогда $\varphi(E_{2,k}) = -a_k$, а $\varphi_1 = a_0$, $\varphi_2 = -a_0$, $U = 2a_0$.

3. Узлы в центрах граней. В узле F нет клемм, поэтому сумма токов через его четыре одинаковых резистора равна нулю (первое правило Кирхгофа), то есть потенциал узла равен среднему потенциалов его соседей. Для граней между рёбрами 0 и 1 и между 3 и 0:

$$\varphi(F_{0,k}) = \varphi(F_{3,k}) = \frac{a_k + 0 + a_{k+1} + 0}{4} = \frac{a_k + a_{k+1}}{4}.$$

4. Рекуррентное соотношение. Узел $E_{0,k}$ при $k \geq 1$ не содержит клемм. Сумма токов через его четыре резистора — к $F_{0,k-1}$, $F_{0,k}$, $F_{3,k-1}$, $F_{3,k}$ — равна нулю:

$$2\left[a_k - \frac{a_k + a_{k+1}}{4}\right] + 2\left[a_k - \frac{a_{k-1} + a_k}{4}\right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{k+1} + a_{k-1} = 6\,a_k.$$

Решение ищем в виде $a_k = a_0\lambda^k$: $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$, $\lambda = 3 \mp 2\sqrt{2}$. Потенциал убывает с удалением от клемм (бесконечно далёкая часть цепи ничем не питается), поэтому берём $\lambda = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 < 1$.

5. Ток через клемму и сопротивление. Ток I, втекающий в клемму 1, уходит по двум её резисторам к $F_{0,0}$ и $F_{3,0}$:

$$I = \frac{2}{R}\left[a_0 - \frac{a_0 + a_1}{4}\right] = \frac{2a_0}{R} \cdot \frac{3 - \lambda}{4} = \frac{a_0}{R} \cdot \frac{3 - \lambda}{2} = \frac{a_0}{R}\sqrt{2},$$

так как $3 - \lambda = 2\sqrt{2}$. Сопротивление

$$R_{12} = \frac{U}{I} = \frac{2a_0}{a_0\sqrt{2}/R} = \sqrt{2}\,R.$$

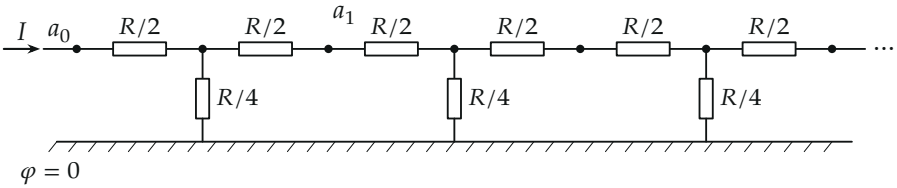


Рис. 2. Эквивалентная схема половины цепи: потенциал середины равен нулю, узлы $E_{1,k}$ и $E_{3,k}$ заземлены. Два параллельных резистора R от $E_{0,k}$ к граням 0 и 3 дают $R/2$, четыре резистора R от узла F к заземлённым узлам — $R/4$

Обратите внимание. Нельзя считать, что весь ток идёт по ближайшим резисторам, а остальная цепь не влияет: заземлённые узлы $E_{1,k}$ и $E_{3,k}$ стоят в каждом слое, и ток уходит в них вдоль всего бруска, причём тем быстрее убывая ($\lambda \approx 0{,}17$ на шаг), чем дальше. Именно поэтому бесконечная цепь даёт конечное сопротивление.

Проверка. Размерность: $\sqrt{2}R$ — сопротивление. Второй способ: эквивалентная схема (рис. 2) для половины цепи. Ток I входит в a_0 и идёт через общий нулевой потенциал; сопротивление цепочки между a_0 и «землёй» x удовлетворяет самоподобию: после первого звена $R/2$ стоит ветвь $R/4$ на землю параллельно участку «$R/2$ + такая же цепочка». Поэтому $x = \dfrac{R}{2} + \dfrac{\frac{R}{4}\left(\frac{R}{2}+x\right)}{\frac{R}{4}+\frac{R}{2}+x}$. Положим $R = 1$: $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, то есть $x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Полное сопротивление $R_{12} = 2x = \sqrt{2}R$ (потенциал a_0 относительно середины — половина U). Оценка: каждая клемма соединена с цепью лишь двумя резисторами R, поэтому $R_{12} \geq R/2 + R/2 = R$, и $\sqrt{2}R > R$. Численный расчёт сети из 240 узлов (решение уравнений Кирхгофа) даёт $1{,}41421\,R$.

Ответ. $R_{12} = \sqrt{2}\,R$.