Стержень на подвесах в магнитном поле

Задача 9. [МОШ 2009/10, 11 класс, задача 9] Тяжелый металлический стержень AB подвешен в горизонтальном положении на двух легких вертикальных проводах в лаборатории, где в некотором объеме создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Участок CD стержня все время находится в магнитном поле, а провода-подвески — вне поля. В первом опыте на стержень подали напряжение, и в нём очень быстро возник ток силой I. Максимальный угол, на который подвески стержня отклонились от вертикали, был при этом равен $\alpha = 60°$. Во втором опыте силу тока через стержень плавно увеличивали от нуля до того же значения I. На какой угол β отклонились подвески во втором опыте?

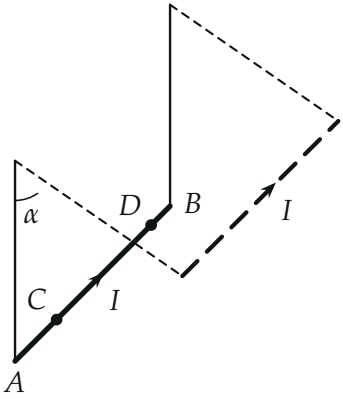


Рисунок условия: стержень AB на двух вертикальных проводах; пунктиром — положение наибольшего отклонения в первом опыте

▲ **Решение. Что происходит.** На стержень действуют сила тяжести mg, силы натяжения проводов и сила Ампера. Сила Ампера приложена только к участку CD, где есть поле: $F = BI\ell$, где ℓ — длина участка CD. Она перпендикулярна и $\vec{B}$ (вертикальному), и стержню, то есть горизонтальна и лежит в плоскости, где качаются подвесы. Подвесы вне поля, а провода одинаковой длины, поэтому стержень остаётся горизонтальным и движется как маятник с постоянной горизонтальной силой F сбоку —

как маятник в «наклонённом» поле тяжести. Ток и поле в обоих опытах одни и те же, поэтому F одно и то же. Разница в способе включения: в первом опыте сила появляется сразу, и стержень, ускоряясь, проскакивает положение равновесия; во втором сила нарастает медленно, и стержень всё время успевает занять положение равновесия. Класс задачи — равновесие и энергия маятника под действием постоянной силы.

Обозначения. m — масса стержня, L — длина проводов, $F = BI\ell$ — сила Ампера, $\alpha = 60°$ — наибольший угол в первом опыте, β — угол отклонения во втором.

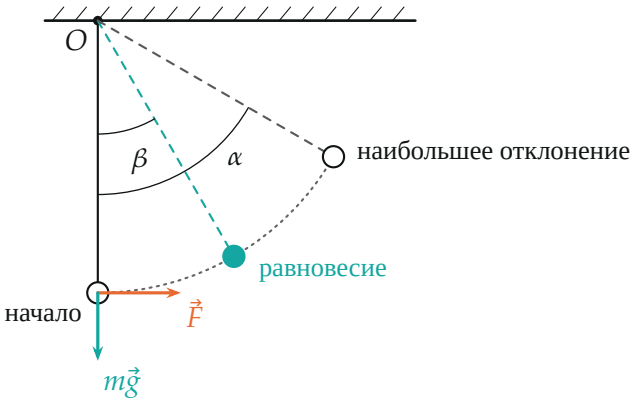


Рис. 1. Вид сбоку (перпендикулярно стержню): три положения стержня. В первом опыте стержень стартует из вертикального положения, проходит равновесие под углом β и останавливается на α. $\vec{F}$ — сила Ампера, горизонтальна

1. Первый опыт (энергия). Стержень стартует из покоя при вертикальных проводах. Сила F включается раньше, чем стержень заметно сдвинется, и дальше постоянна. В положении наибольшего отклонения α скорость снова нуль. Теорема о кинетической энергии для стержня за это время: изменение кинетической энергии равно нулю и равно работе всех сил. Сила натяжения проводов работы не совершает (перпендикулярна скорости), сила тяжести совершает работу $-mgL(1-\cos\alpha)$ (стержень поднялся на $L(1-\cos\alpha)$), постоянная горизонтальная сила

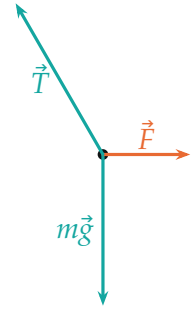
Ампера — работу $F \cdot L\sin\alpha$ (смещение по горизонтали $L\sin\alpha$):

$$0 = F\,L\sin\alpha - mgL\,(1-\cos\alpha) \quad\Longrightarrow\quad \frac{F}{mg} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

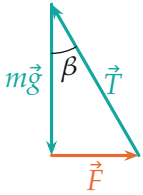
Последнее равенство — формулы половинного угла: $1-\cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

2. Второй опыт (равновесие). Сила нарастает плавно, стержень всё время находится в равновесии, и в конце, при токе I, покоится под углом β. Три силы: $m\vec{g}$, $\vec{F}$ и натяжение проводов $\vec{T}$ (вдоль проводов). Второй закон Ньютона (равновесие) в проекциях на вертикаль и горизонталь:

$$T\cos\beta = mg, \qquad T\sin\beta = F \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{F}{mg}.$$



силы на стержень



треугольник сил: $\operatorname{tg}\beta = F/mg$

Рис. 2. Равновесие во втором опыте: сумма трёх сил равна нулю, их векторы образуют замкнутый прямоугольный треугольник с катетами mg и F (рисунок для $\beta = 30°$)

3. Сравнение. Из п. 1 и п. 2 $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, поэтому

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = 30°, \qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°.$$

Во втором опыте стержень отклонился на 30° — вдвое меньше, чем при резком включении тока.

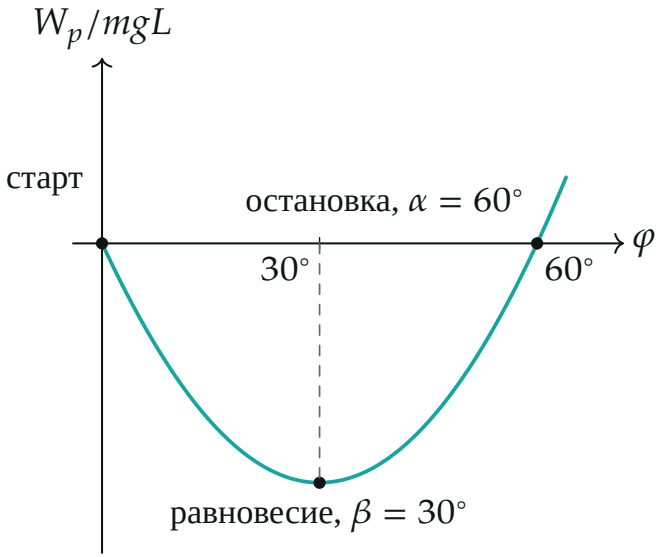


Рис. 3. Потенциальная энергия стержня с учётом работы силы Ампера, $W_p = mgL(1 - \cos\varphi) - FL\sin\varphi$, при $F/mg = \operatorname{tg} 30°$. Минимум при $\beta = 30°$ (второй опыт); в первом опыте стержень стартует с $\varphi = 0$ и останавливается там, где W_p снова равно нулю, то есть при 60°

Обратите внимание. Нельзя считать, что в первом опыте стержень отклонился «настолько, насколько сила его толкнула»: при быстром включении он проходит положение равновесия и останавливается на симметричном расстоянии с другой стороны. Считаем также, что источник поддерживает ток I, а ЭДС индукции, возникающей при движении стержня в поле, мала по сравнению с напряжением источника; иначе сила менялась бы в ходе движения.

Проверка. Размерность: F/mg безразмерно, угол β дан в градусах. Второй способ для первого опыта: стержень в потенциале $W_p(\varphi) = mgL\,(1 - \cos\varphi) - FL\sin\varphi$ (рис. 3) стартует с $\varphi = 0$, где $W_p = 0$, и останавливается там, где W_p снова равно нулю: $1 - \cos\varphi = \dfrac{F}{mg}\sin\varphi$, то

есть $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{F}{mg}$ — та же формула с $\varphi = \alpha$. Но $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{F}{mg}$ даёт положение минимума, значит $\alpha = 2\beta$: колебания симметричны относительно равновесия, как у маятника в однородном «эффективном» поле тяжести $g/\cos\beta$, направленном под углом β к вертикали. Предел малой силы: $F \ll mg$: $\beta \approx F/mg$, а $\alpha \approx 2F/mg$: известный результат, что внезапно приложенная постоянная сила вызывает вдвое большее отклонение, чем медленно нарастающая.

Ответ. $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30°$.