Две линзы и прямоугольник

Задача 10. [МОШ 2009/10, 11 класс, задача 10] Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $f_1 = 20$ см и $f_2 = 10$ см расположены на одной прямой так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система линз формирует действительное изображение прямоугольника со сторонами $a_1 = 1$ мм и $b_1 = 2$ мм, также являющееся прямоугольником. Сторона a_1 прямоугольника лежит на главной оптической оси системы. На каком расстоянии L друг от друга расположены линзы? Каковы размеры изображения a_2 и b_2?

▲ **Решение. Что происходит.** Вторая сторона прямоугольника, b_1, перпендикулярна оси, а первая, a_1, лежит на оси. Изображение точки, стоящей на расстоянии s от первой линзы, имеет поперечный размер $\Gamma(s) \cdot$ (её высота), где Γ — поперечное увеличение системы. Сторона прямоугольника, параллельная оси, начинается и заканчивается на разных расстояниях s. Если Γ зависит от s, то на одном конце изображение выше, чем на другом, и прямоугольник превращается в трапецию. Значит, поперечное увеличение должно быть одним и тем же для всех точек на оси, и это бывает лишь в одном случае: линзы образуют телескопическую (афокальную) систему, $L = f_1 + f_2$. Тогда параллельный пучок остаётся параллельным, а размеры изображения даются коэффициентами Γ (поперёк) и Γ^2 (вдоль оси). Класс задачи — система двух тонких линз.

Обозначения. φ_1, φ_2 — фокусные расстояния первой и второй по ходу света линз (какая из двух стоит первой, в условии не сказано, поэтому ниже разобраны оба порядка; тогда $\{\varphi_1, \varphi_2\} = \{20\text{ см}, 10\text{ см}\}$), s — расстояние от предмета до первой линзы, s_1 — расстояние от первой линзы до её изображения (положительное, если изображение справа), d — расстояние от второй линзы до промежуточного изображения, s_2 — расстояние от второй линзы до итогового изображения, Γ — поперечное увеличение всей системы.

1. Увеличение системы. Формула тонкой линзы $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s_1} = \dfrac{1}{\varphi_1}$ даёт $s_1 = \dfrac{s\varphi_1}{s - \varphi_1}$, увеличение первой линзы $\Gamma_1 = -\dfrac{s_1}{s} = -\dfrac{\varphi_1}{s - \varphi_1}$. Предмет

для второй линзы — это изображение первой, на расстоянии $d = L - s_1$ от неё. Так же получаем увеличение второй линзы $\Gamma_2 = -\dfrac{\varphi_2}{d-\varphi_2}$. Перемножаем:

$$\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2 = \frac{\varphi_1\varphi_2}{(s-\varphi_1)(d-\varphi_2)},$$

$$(s-\varphi_1)(d-\varphi_2) = (s-\varphi_1)(L-\varphi_2) - s\varphi_1 = s\,(L-\varphi_1-\varphi_2) - \varphi_1(L-\varphi_2),$$

здесь использовано $(s-\varphi_1)s_1 = s\varphi_1$. Итак,

$$\Gamma(s) = \frac{\varphi_1\varphi_2}{s\,(L-\varphi_1-\varphi_2) - \varphi_1(L-\varphi_2)}.$$

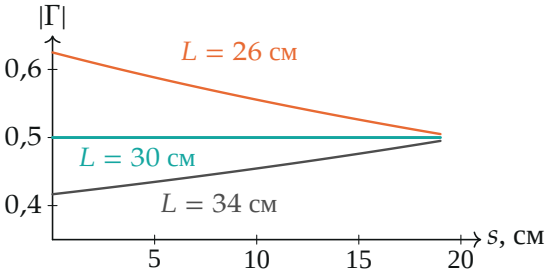


Рис. 1. Модуль поперечного увеличения $|\Gamma|$ для $\varphi_1 = 20$ см, $\varphi_2 = 10$ см как функция расстояния s от предмета до первой линзы. Только при $L = \varphi_1 + \varphi_2 = 30$ см он не зависит от s

2. Расстояние между линзами. Для прямоугольного изображения Γ должно быть одним и тем же при всех s из интервала, занятого предметом. Знаменатель $\Gamma(s)$ линеен по s; он постоянен только если коэффициент при s равен нулю:

$$L = \varphi_1 + \varphi_2 = 20\text{ см} + 10\text{ см} = 30\text{ см}.$$

Тогда $\Gamma = \dfrac{\varphi_1\varphi_2}{-\varphi_1\varphi_1} = -\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$: изображение перевёрнуто и одинаково увеличено во всех точках.

3. Размер вдоль оси. При $L = \varphi_1 + \varphi_2$ расстояние до итогового изображения $s_2 = \dfrac{d\varphi_2}{d-\varphi_2}$, где $d = \varphi_1 + \varphi_2 - s_1$ и $d - \varphi_2 = \varphi_1 - s_1 = -\dfrac{\varphi_1^2}{s-\varphi_1}$

(по формуле для s_1). После подстановки

$$s_2 = \varphi_2 + \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 (\varphi_1 - s).$$

Положение изображения зависит от s линейно с наклоном $-\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2$. Значит, отрезок на оси длиной a_1 превращается в отрезок длиной $a_2 = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 a_1$. Поперёк, по п. 2, размер меняется в $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ раз:

$$a_2 = a_1 \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2, \qquad b_2 = b_1 \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Изображение действительное, если оно получается за второй линзой: $s_2 > 0$, то есть $s < \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2}$ (60 см при первой линзе $f = 20$ см и 15 см при первой линзе $f = 10$ см) — условие легко выполнить, и оно не влияет на размеры. На рисунках ниже предмет стоит между первой линзой и её фокусом: первая линза даёт мнимое увеличенное изображение, а вторая превращает его в действительное.

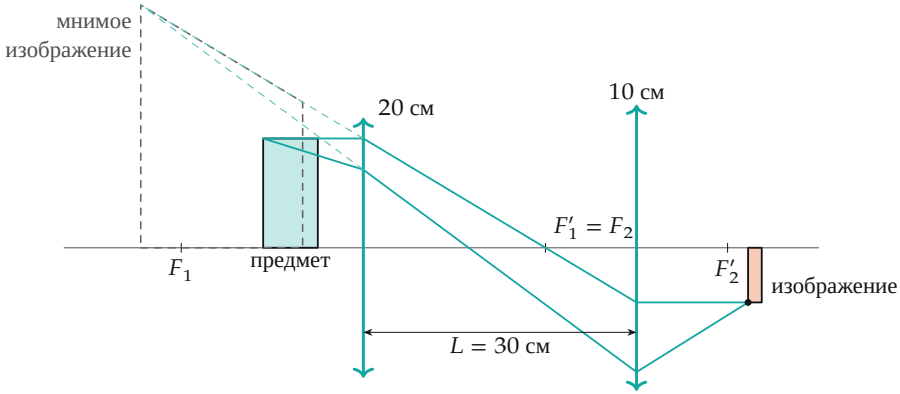


Рис. 2. Ход лучей при $\varphi_1 = 20$ см, $\varphi_2 = 10$ см, $L = 30$ см (предмет условно увеличен). Луч, параллельный оси, идёт через общий фокус $F'_1 = F_2$ и выходит параллельно оси

4. Два порядка линз. Подставим числа.

Первой стоит линза $f = 20$ *см* ($\varphi_1 = 20$ см, $\varphi_2 = 10$ см): $\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} = \dfrac{1}{2}$,

$$a_2 = 1\text{ мм} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}25\text{ мм}, \qquad b_2 = 2\text{ мм} \cdot \frac{1}{2} = 1\text{ мм}.$$

Первой стоит линза $f = 10$ *см* ($\varphi_1 = 10$ см, $\varphi_2 = 20$ см): $\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} = 2$,

$$a_2 = 1\text{ мм} \cdot 4 = 4\text{ мм}, \qquad b_2 = 2\text{ мм} \cdot 2 = 4\text{ мм}.$$

В обоих порядках $L = f_1 + f_2 = 30$ см.

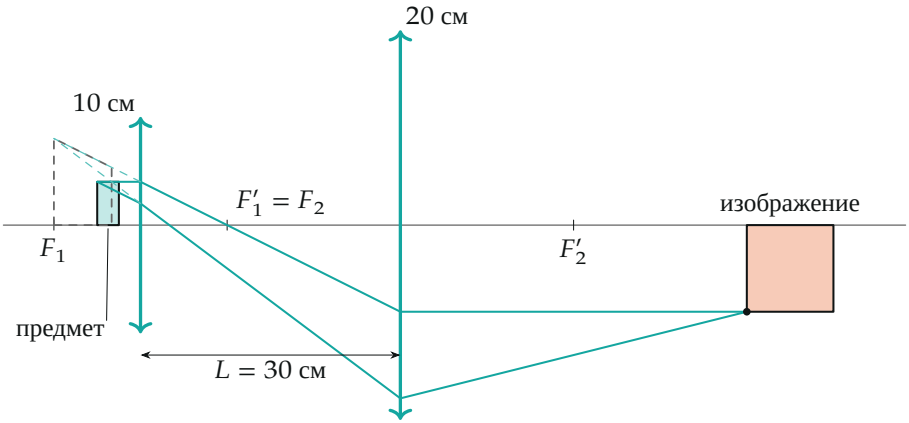


Рис. 3. Те же линзы в обратном порядке (первая $f = 10$ *см, вторая* $f = 20$ *см). Размеры предмета и изображения на рисунке условно увеличены; отношение сторон изображения — 1 : 1 (квадрат* 4×4 *мм), оно больше предмета*

Обратите внимание. Ответов два: условие не говорит, какая линза стоит первой, и при обоих порядках изображение — прямоугольник и действительное. Ось, вдоль которой изображение растягивается, растягивается в *квадрат* увеличения: если поперёк в k раз, то вдоль оси в k^2 раз, поэтому прямоугольник 1×2 мм при $k = 2$ даёт квадрат.

Проверка. Размерность: длины, и $L = f_1 + f_2$ — длина. Предел $f_1 = f_2$: $\Gamma = -1$, размеры не меняются ($a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$), как у системы, переносящей изображение без искажений. Второй способ для $\Gamma = -\varphi_2/\varphi_1$:

параллельный пучок, идущий под малым углом, собирается первой линзой в её фокусе F_1' на высоте $h = \varphi_1\theta$, и вторая линза (её фокус там же) выпускает пучок под углом $\theta_2 = h/\varphi_2$; угловое увеличение $\theta_2/\theta = \varphi_1/\varphi_2 = 1/|\Gamma|$, что согласуется с законом Лагранжа — Гельмгольца ($|\Gamma|\cdot$ угловое увеличение $= 1$ для одинаковых сред).

Ответ. $L = f_1 + f_2 = 30$ см; если первой стоит линза $f = 20$ см: $a_2 = 0{,}25$ мм, $b_2 = 1$ мм; если первой стоит линза $f = 10$ см: $a_2 = 4$ мм, $b_2 = 4$ мм.