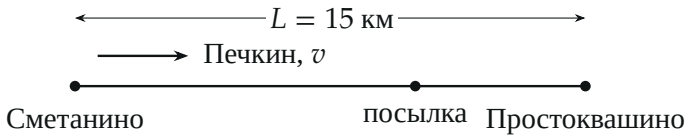
Почтальон Печкин и посылка

Задача 1. [МОШ 2009/10, 7 класс, задача 1] Почтальон Печкин выехал из райцентра Сметанино в деревню Простоквашино с посылкой для кота Матроскина. Он ехал со скоростью 15 км в час, а расстояние, которое ему надо было проехать, составляет 15 км. Приехав в Простоквашино, он обнаружил, что по дороге потерял посылку, и сразу же поехал за ней обратно. Когда он нашел посылку, то подобрал ее и снова поехал к коту. Тем временем кот Матроскин, который хотел как можно быстрее получить посылку, сразу после выезда Печкина из Простоквашино побежал за почтальоном со скоростью 5 км в час, и получил посылку через полчаса из рук Печкина, который уже снова ехал в Простоквашино. На каком расстоянии от Сметанино Печкин потерял посылку?



Поясняющий рисунок: дорога из Сметанина в Простоквашино. Положение посылки на рисунке — условное, его и надо найти.

▲ **Решение. Что происходит.** Печкин доехал до Простоквашина, развернулся, доехал до посылки, снова развернулся и поехал обратно к Простоквашину. Всё это время Матроскин бежит ему навстречу от Простоквашина. Они встречаются через полчаса после выезда Печкина из деревни. Главная идея — за полчаса Печкин проехал известный путь vt, и этот путь складывается из участка до посылки и участка обратно до точки встречи. Точку встречи даёт Матроскин, он бежал ровно полчаса с известной скоростью.

Обозначения. Ось x направлена от Сметанина к Простоквашину, начало отсчёта — в Сметанине. $L = 15$ км, $v = 15$ км/ч, $V = 5$ км/ч, $t = 0{,}5$ ч — время от выезда Печкина из Простоквашина до встречи, x — искомое расстояние от Сметанина до места, где потеряна посылка. Время отсчитываем от момента, когда Печкин приехал в Простоквашино.

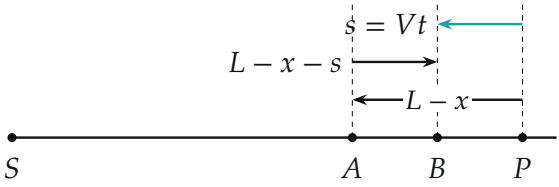
1. Где встреча. Матроскин бежит от Простоквашина с постоянной скоростью V ровно t:

$$s = Vt = 5 \cdot 0{,}5 \text{ км} = 2{,}5 \text{ км}.$$

Точка встречи B находится на расстоянии s от Простоквашина, то есть в точке с координатой $L - s$.

2. Путь Печкина за то же время. Он едет с постоянной по модулю скоростью v, потому что скорость не менялась ни при развороте у посылки, ни при подборе: путь за время t равен $vt = 15 \cdot 0{,}5$ км $= 7{,}5$ км. Из чего этот путь состоит? Сначала от Простоквашина до посылки: $L - x$. Потом обратно от посылки до точки встречи B: это $L - x$ минус расстояние s от Простоквашина до B, так как B не доезжает до Простоквашина на s. Итого

$$vt = (L - x) + \big[(L - x) - s\big] = 2(L - x) - s.$$



Пути за время t от выезда Печкина из Простоквашина: Печкин едет $P \to A$, затем $A \to B$ (чёрные стрелки), Матроскин бежит $P \to B$ (бирюзовая). Расстояния отсчитаны от Простоквашина P; A — место, где лежит посылка, B — место встречи.

3. Решаем. Неизвестным осталось x. Из уравнения пункта 2:

$$L - x = \frac{vt + s}{2} = \frac{vt + Vt}{2} = t\,\frac{v + V}{2} \quad \Rightarrow \quad x = L - t\,\frac{v + V}{2}.$$

Подставим: $L - x = 0{,}5 \cdot \dfrac{15 + 5}{2} = 5$ км, поэтому

$$x = 15 \text{ км} - 5 \text{ км} = 10 \text{ км}.$$

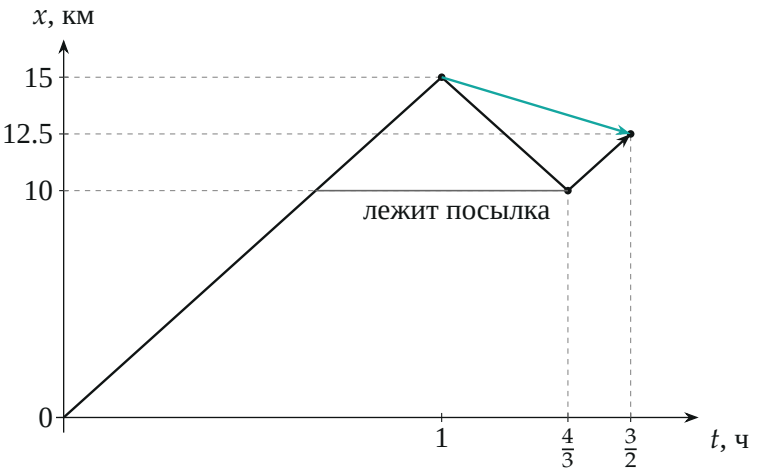


График $x(t)$: время от выезда Печкина из Сметанина. Чёрная ломаная — Печкин, бирюзовая — Матроскин. Пунктиры на осях: 15, 12,5 *и* 10 *км; моменты* 1, $\frac{4}{3}$ *и* $\frac{3}{2}$ *ч. Посылка лежит в точке* 10 *км с момента* $\frac{2}{3}$ *ч до подбора в* $\frac{4}{3}$ *ч.*

Обратите внимание. Скорость Печкина — 15 км/ч на всех участках; нельзя считать, что при возвращении к посылке он ехал иначе. И Печкин, и Матроскин считают время одно и то же $t = 0{,}5$ ч: Матроскин побежал сразу после выезда Печкина из Простоквашина, а встретились они через полчаса.

Проверка. Размерность: км/ч·ч = км. Проверим, что события сходятся: до Простоквашина Печкин ехал $\frac{15}{15} = 1$ ч; на возврат к посылке (5 км) ушло $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ч, на путь от посылки до встречи (12,5 − 10 = 2,5 км) — $\frac{1}{6}$ ч; итого $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ч — как раз то время, что бежал Матроскин (путь 2,5 км на скорости 5 км/ч). Ответ лежит между 0 и 15 км, как и должен. Смысл: за полчаса Печкин проехал 7,5 км — это пять километров к посылке и ещё два с половиной обратно.

Ответ. $x = L - t\dfrac{v+V}{2} = 10$ км от Сметанина.