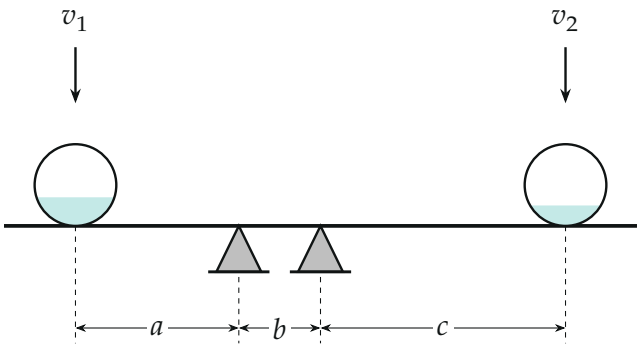
Бочки на рычаге с двумя опорами

Задача 3. [МОШ 2009/10, 7 класс, задача 3] На легком горизонтальном рычаге с двумя опорами находятся пустые легкие бочки. Расстояние от оси левой бочки до левой опоры $a = 2$ метра, от оси правой бочки до правой опоры — $c = 3$ метра, расстояние между опорами $b = 1$ метр. В обе бочки одновременно начинают наливать с небольшой скоростью воду из разных кранов. Как должны соотноситься скорости v_1 и v_2 наполнения бочек, то есть массы воды, поступающие в единицу времени в каждую бочку, чтобы система оставалась в равновесии?



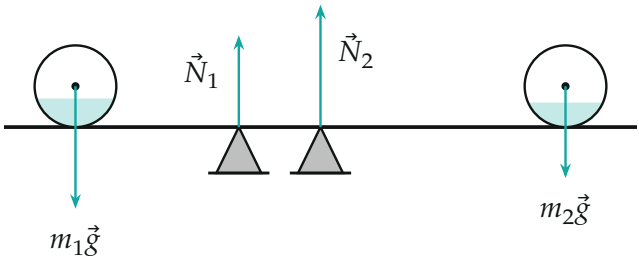
Поясняющий рисунок: рычаг на двух опорах, на концах — бочки с водой, краны с расходами v_1 и v_2. Расстояния a, b, c — как в условии.

▲ **Решение. Что происходит.** Рычаг лёгкий, лежит на двух опорах, и каждая может только толкать его вверх — тянуть вниз она не умеет. Пока обе опоры давят на рычаг, он стоит. Бочки тяжелеют, и силы реакции опор меняются. Если левая бочка наливается слишком быстро, рычаг перевесит влево, оторвётся от правой опоры и повернётся вокруг левой; если слишком быстро правая — оторвётся от левой опоры и повернётся вокруг правой. Главная идея — записать условие равновесия рычага, найти реакции опор и потребовать, чтобы обе были неотрицательны.

Обозначения. m_1, m_2 — массы воды в левой и правой бочках в некоторый момент τ после начала наливания; $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — силы, с которыми левая и правая опоры действуют на рычаг. Бочки и рычаг лёгкие, их

веса не учитываем. Вода течёт с постоянными скоростями, а наливать начали одновременно, поэтому $m_1 = v_1\tau$, $m_2 = v_2\tau$ и отношение масс не зависит от времени:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_2}{v_1} \equiv k.$$



Силы, действующие на рычаг: тяжести воды $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ приложены в осях бочек, реакции опор $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ направлены вверх. Показан случай $k = 0{,}75$: длины стрелок в масштабе.

1. Условия равновесия рычага. Рычаг неподвижен: сумма сил и сумма моментов равны нулю. Вертикальные силы дают $N_1 + N_2 = (m_1 + m_2)g$ — с этим уравнением мы сверимся в конце. Моменты запишем относительно опор: тогда реакция именно той опоры, относительно которой берём моменты, момента не даёт, и из уравнения сразу выходит другая. Вращение по часовой стрелке считаем положительным.

2. Моменты относительно правой опоры. Левая реакция N_1 приложена на расстоянии b слева и вращает по часовой стрелке (левая часть поднимается), тяжесть m_2g — на расстоянии c справа, тоже по часовой; тяжесть m_1g — на расстоянии $a + b$ слева, против часовой:

$$N_1\,b + m_2g\,c - m_1g\,(a + b) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{g}{b}[m_1(a + b) - m_2c].$$

3. Моменты относительно левой опоры. Реакция N_2 приложена на расстоянии b справа (против часовой), m_2g — на расстоянии $b+c$ справа (по часовой), m_1g — на расстоянии a слева (против часовой):

$$m_2g\,(b + c) - N_2\,b - m_1g\,a = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{g}{b}[m_2(b + c) - m_1a].$$

4. Условия отсутствия опрокидывания. Нужны $N_1 \geq 0$ и $N_2 \geq 0$:

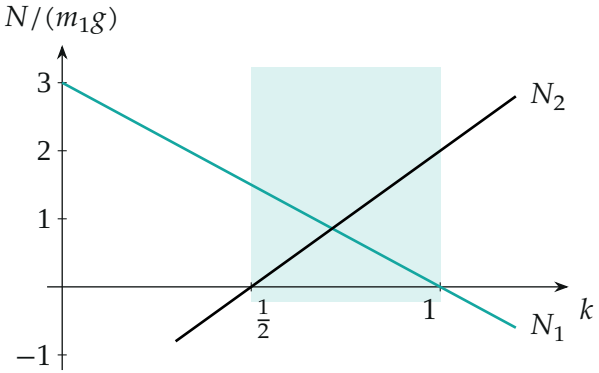
$$N_1 \geq 0: \quad m_1(a+b) \geq m_2 c \;\Rightarrow\; k \leq \frac{a+b}{c} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$N_2 \geq 0: \quad m_2(b+c) \geq m_1 a \;\Rightarrow\; k \geq \frac{a}{b+c} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Значит, система в равновесии, пока

$$\frac{1}{2} \leq \frac{v_2}{v_1} \leq 1.$$

На краях этого промежутка одна из опор разгружается (реакция становится нулём), а рычаг ещё стоит; поэтому в ответе организаторов неравенства записаны строгими: для равновесия «с запасом» обе опоры должны давить.



Реакции опор в единицах $m_1 g$ в зависимости от $k = v_2/v_1$: $N_1 = 3 - 3k$ (бирюзовая), $N_2 = 4k - 2$ (чёрная). Обе неотрицательны на закрашенном промежутке $\frac{1}{2} \leq k \leq 1$.

5. Проверка уравнений. Сложим реакции: $N_1 + N_2 = \frac{g}{b}[m_1(a+b-a) + m_2(b+c-c)] = \frac{g}{b}\,b\,(m_1+m_2) = (m_1+m_2)g$ — сошлось с вертикальным уравнением.

Обратите внимание. Опора не может тянуть: если по формуле N вышла отрицательной, значит, рычаг уже оторвался от этой опоры, и рав-

новесие на двух опорах невозможно. Условие нужно ставить для обеих опор, а не для одной.

Проверка. Граница $k = \frac{1}{2}$: относительно левой опоры $m_2(b + c) = \frac{1}{2}m_1 \cdot 4 = 2m_1 = m_1 a$ — баланс только двух тяжестей, $N_2 = 0$. Граница $k = 1$: относительно правой $m_1(a + b) = 3m_1 = m_2 c$, $N_1 = 0$. Средняя точка $k = 0{,}75$: $N_1 = 0{,}75\, m_1 g$, $N_2 = m_1 g$, сумма $1{,}75\, m_1 g = (m_1 + 0{,}75 m_1) g$. Второй способ: рычаг стоит, пока вертикаль через центр тяжести двух грузов проходит между опорами. Координата центра тяжести, если начало — в левой опоре, равна $x_{\text{ц}} = \dfrac{m_2(b + c) - m_1 a}{m_1 + m_2}$, и условие $0 \le x_{\text{ц}} \le b$ приводит к тем же двум неравенствам $k \ge \frac{1}{2}$ и $k \le 1$. Смысл: бочки не должны перевесить рычаг ни на одну сторону.

Ответ. $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{v_2}{v_1} \le 1$, то есть $\dfrac{a}{b + c} \le \dfrac{v_2}{v_1} \le \dfrac{a + b}{c}$; на краях промежутка одна из опор разгружена (у организаторов неравенства строгие).