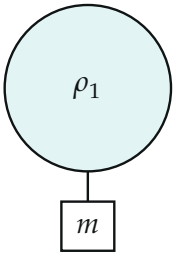
Винни-Пух и шарик с тёплым воздухом

Задача 4. [МОШ 2009/10, 7 класс, задача 4] В известном мультфильме про Винни-Пуха есть явное несоответствие: Винни-Пух надувает воздушный шарик обычным воздухом и взлетает на нём. Для того, чтобы воздушный шарик поднимался (а тем более поднимал Винни-Пуха), нужно, чтобы он был наполнен лёгким газом, плотность которого меньше плотности окружающего воздуха. Можно предположить, что Винни-Пух надувает шарик тёплым воздухом, плотность которого, как известно, меньше плотности холодного. Рассчитайте, каким должен быть в этом случае минимальный необходимый для подъёма объём шарика, если плотность тёплого воздуха внутри $\rho_1 = 1{,}13$ кг/м^3, плотность холодного воздуха снаружи $\rho_2 = 1{,}29$ кг/м^3, а масса Винни-Пуха $m = 5$ кг.



воздух снаружи: ρ_2

Поясняющий рисунок: шарик с тёплым воздухом (плотность ρ_1), под ним — Винни-Пух массой m; снаружи — холодный воздух плотности ρ_2.

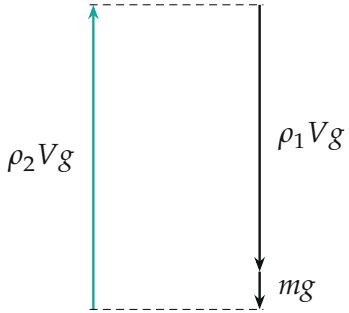
▲ **Решение.** **Что происходит.** Шарик стоит в воздухе, как тело в жидкости: на него действует выталкивающая сила — вес вытесненного воздуха. Но вниз тянут и Винни-Пух, и тёплый воздух внутри шарика: он тоже имеет вес. Поэтому на подъём Винни-Пуха идёт не вся архимедова сила, а только та её часть, на которую холодный воздух тяжелее тёплого того же объёма. Главная идея — записать условие, при котором архимедова сила уравновешивает вес Винни-Пуха и вес тёплого воздуха; при большем объёме шарик взлетит, при меньшем — нет. Оболочку шарика считаем невесомой, как и подразумевает условие.

Обозначения. V — объём шарика (он же объём вытесненного воздуха), ось y вверх, F_A — сила Архимеда, $m_\text{в} = \rho_1 V$ — масса тёплого воздуха внутри.

1. Сила Архимеда. Шарик вытесняет объём V холодного воздуха, значит, архимедова сила равна весу этого воздуха:

$$F_A = \rho_2 Vg.$$

2. Силы тяжести. На систему «Винни-Пух + шарик + тёплый воздух внутри» вниз действуют тяжесть Винни-Пуха mg и тяжесть тёплого воздуха $m_{\text{в}}g = \rho_1 Vg$.



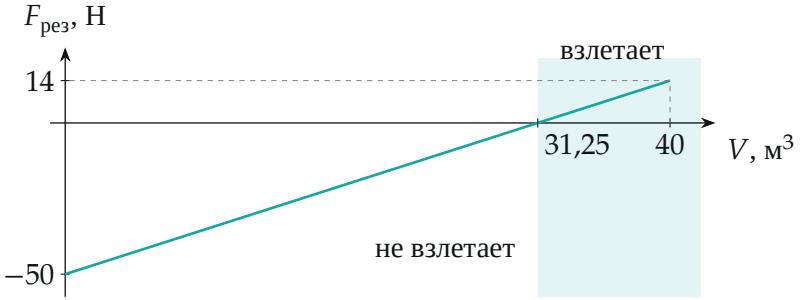
Баланс сил на пороге подъёма при $V = 31{,}25$ м^3 (масштаб: 1 см — 100 Н). Бирюзовая стрелка вверх — сила Архимеда, чёрные вниз — тяжесть тёплого воздуха и Винни-Пуха; их суммарная длина равна длине стрелки вверх.

3. Условие подъёма. Шарик начнёт подниматься, когда сила Архимеда сравняется с суммой сил тяжести (при меньшем объёме шарик не оторвётся). Равновесие в проекции на y:

$$F_A - mg - \rho_1 Vg = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 Vg = mg + \rho_1 Vg.$$

Перенесём члены с V в одну часть и сократим g:

$$(\rho_2 - \rho_1)\, V = m \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{5\ \text{кг}}{(1{,}29 - 1{,}13)\ \text{кг/м}^3} = 31{,}25\ \text{м}^3.$$



Результирующая подъёмная сила $F_{рез} = (\rho_2 - \rho_1)gV - mg = 1{,}6\,V - 50$ (в ньютонах, $g = 10$ м/с^2). Она положительна при $V > 31{,}25$ м^3 — закрашенная область.

Обратите внимание. Нельзя забыть вес тёплого воздуха внутри. Если считать, что шарик поднимает Винни-Пуха силой Архимеда $\rho_2 Vg$ и больше ничего не тянет вниз, получится $V = m/\rho_2 \approx 3{,}9$ м^3 — в восемь раз меньше верного: воздух в шарике тоже надо поднять.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}}{\text{кг/м}^3} = \text{м}^3$. Предельные случаи: при $\rho_1 \to \rho_2$ (воздух внутри не легче наружного) $V \to \infty$ — шарик не взлетит при любом объёме, как и сказано в условии; при $\rho_1 \to 0$ (шарик пуст) $V = m/\rho_2 \approx 3{,}9$ м^3 — меньше этого объёма не обойтись никогда. Подстановка: подъёмная сила $\rho_2 Vg = 1{,}29 \cdot 31{,}25 \cdot 10 \approx 403$ Н, тяжесть $mg + \rho_1 Vg = 50 + 353 = 403$ Н — сходится. Смысл: объём получился огромным — шар диаметром около 3,9 м — поэтому в мультфильме так не бывает: тёплый воздух отличается от холодного по плотности слишком мало.

Ответ. $V = \dfrac{m}{\rho_2 - \rho_1} = 31{,}25$ м^3.