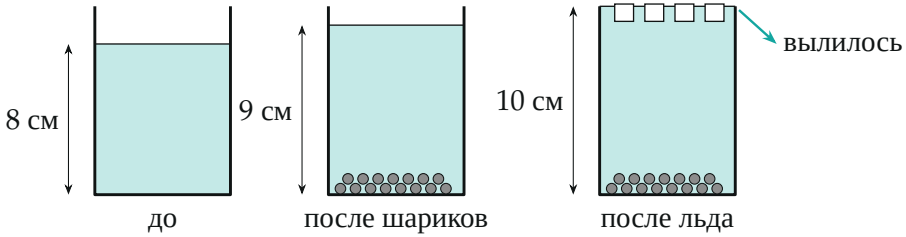
Стакан с шариками и льдом

Задача 3. [МОШ 2009/10, 8 класс, задача 3] В вертикальный цилиндрический стакан высотой $H = 10$ см и площадью дна $S = 100$ см^2 налита вода до уровня $h = 8$ см. В стакан опустили, не разбрызгивая воду, $N_1 = 100$ стальных шариков объемом $V_1 = 1$ см^3 каждый, а затем еще $N_2 = 50$ ледяных кубиков объемом $V_2 = 2{,}5$ см^3. Какова оказалась после этого сила F давления на дно стакана? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, стали $\rho_1 = 7{,}8$ г/см^3, льда $\rho_2 = 0{,}9$ г/см^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, трением и атмосферным давлением пренебречь.



Поясняющий рисунок: три состояния стакана, уровни воды 8, 9 и 10 см. Шарики тонут и лежат на дне, лёд плавает; после льда вода доходит до края и часть выливается.

▲ **Решение. Что происходит.** Сначала шарики вытесняют воду, уровень поднимается. Лёд легче воды, он плавает и вытесняет объём, равный объёму воды той же массы. Если суммарно вода поднимется выше края, лишнее выльется, и эту потерю нужно учесть. Главная идея — проверить, переполнится ли стакан, а потом найти силу на дно как вес всего, что осталось в стакане: стенки вертикальны и вес на себя не берут.

Обозначения. S — площадь дна, H — высота стакана; $V_c = N_1 V_1 = 100$ см^3 — объём стали; $m_c = \rho_1 V_c$, $m_л = \rho_2 N_2 V_2$, $m_в$ — массы стали, льда и оставшейся воды.

1. Выльется ли вода. Вода с шариками занимает объём $Sh + V_c = 800 + 100 = 900$ см^3, уровень 9 см — ниже края. Плавающий кубик вытесняет столько воды, сколько весит сам: объём погружённой части

равен $\frac{\rho_2}{\rho}V_2 = 0{,}9 \cdot 2{,}5 = 2{,}25$ см^3. У 50 кубиков погружённая часть — 112,5 см^3. Тогда под уровнем оказалось бы

$$Sh + V_c + \frac{\rho_2}{\rho}N_2V_2 = 1012{,}5 \text{ см}^3 > SH = 1000 \text{ см}^3,$$

то есть вода вышла бы выше края. Вода выливается, пока уровень не станет равным H, значит, в конце вся система под уровнем H занимает ровно $SH = 1000$ см^3, и вылилось 12,5 см^3 воды.

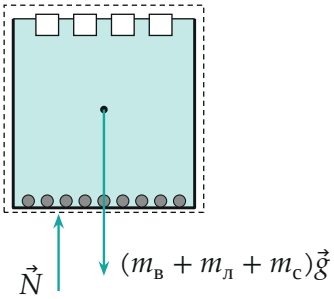
2. Масса воды, что осталась. Объём воды равен объёму под уровнем H минус стальные шарики и погружённые части кубиков:

$$V_\text{в} = SH - V_c - 112{,}5 = 1000 - 100 - 112{,}5 = 787{,}5 \text{ см}^3,$$
$$m_\text{в} = \rho V_\text{в} = 787{,}5 \text{ г}.$$

Остальные массы: $m_c = 7{,}8 \cdot 100 = 780$ г, $m_\text{л} = 0{,}9 \cdot 50 \cdot 2{,}5 = 112{,}5$ г.

3. Сила на дно как вес содержимого. Рассмотрим систему «вода + шарики + лёд». Она неподвижна: сумма внешних сил равна нулю. Вертикальные силы — тяжесть и реакция дна N (давление воды на вертикальные стенки горизонтально, трения нет). Отсюда $N = (m_\text{в} + m_\text{л} + m_c)g$, а сила давления на дно по третьему закону Ньютона равна N:

$$F = (m_\text{в} + m_\text{л} + m_c)\,g = (0{,}7875 + 0{,}1125 + 0{,}78) \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2$$
$$= 1{,}68 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 16{,}8 \text{ Н}.$$



Система «вода + шарики + лёд» (обведена пунктиром): вниз — суммарная

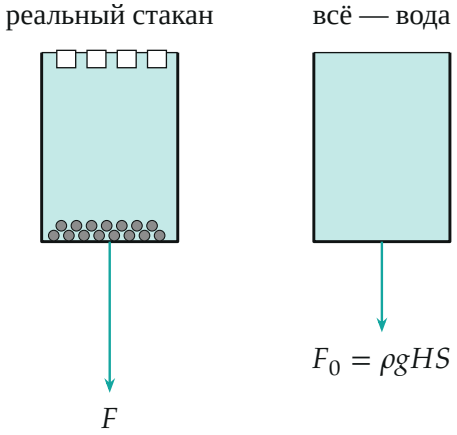
тяжесть, вверх — сила $\vec{N}$ со стороны дна. Стенки давят горизонтально и в вертикальную проекцию не входят. По третьему закону Ньютона содержимое давит на дно с силой $F = N$.

Сила давления на дно здесь — полная сила, с которой всё содержимое действует на дно: и давление воды, и прямое давление лежащих на дне шариков.

4. Второй способ — замена на воду. Если бы вместо шариков и льда в стакане была только вода до уровня H, сила на дно равнялась бы $F_0 = \rho g H S$. Плавающий кубик весит ровно столько, сколько вытесненная им вода, поэтому лёд сила на дно не меняет. Каждый шарик вместо воды того же объёма добавляет вес $(\rho_1 - \rho)V_1 g$, поскольку тяжелее воды:

$$F = \rho g H S + N_1 V_1 (\rho_1 - \rho) g = 10\ \text{Н} + 6{,}8\ \text{Н} = 16{,}8\ \text{Н}.$$

Здесь $\rho g H S = 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 10$ Н, $N_1 V_1 (\rho_1 - \rho) g = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 6800 \cdot 10 = 6{,}8$ Н.



Уровень один и тот же, H. Разница сил — от шариков: они тяжелее воды, которую вытеснили.

Обратите внимание. Ответ $\rho g H S = 10$ Н неверен: так считается давление на дно, когда в стакане одна вода. Шарики стальные, они тяжелее той воды, место которой заняли, и давят на дно сильнее. Вылившаяся

вода в ответ не входит: её вес в F не попадает, поскольку она уже не в стакане.

Проверка. Размерность: $\rho g H S$ — кг/м^3·м/с^2·м·м^2 = Н. Если бы стакан был выше и ничего не выливалось, сила была бы $(800+780+112{,}5)\cdot 10^{-3}\cdot 10 = 16{,}925$ Н; вылилось 12,5 г воды, их вес 0,125 Н — остаётся 16,8 Н, как и получили. Смысл: сила на дно равна весу всего, что осталось в стакане.

Ответ. $F = \rho g H S + N_1 V_1 (\rho_1 - \rho) g = 16{,}8$ Н.